Vísitölur í samfelldum tíma á strjálum markaði

Helgi Tómasson

Málstofa Seðlabanka Íslands

18. mars. 2002

1 Inngangur

Í eftirfarandi erindi verður lýst vinnu höfundar við greiningu viðskiptagagna af Verðbréfaþingi Íslands. Ákveðin aðferðafræði er þróuð þannig að upplýsingar úr sérhverjum viðskiptum eru notuð og engu er bætt við. Við vísitöluuppbyggingu er notast við hugmyndafræðina svokallaðrar „stochastic-approach".

2 Skilvirkir markaðir: Efficient market hypothesis(EMH)

Rétt verð á frjálsum markaði einkennist af því að hvorki seljandi né kaupandi hagnist beint. Enginn aðili á markaði á að geta fengið áhættulausan hagnað með því að skipuleggja kaup og sölu með einhverjum hætti. Þetta felur í sér að verð hljóta að vera að minnsta kosti hluta til ófyrirsjáanleg. Bachelier (1900) setti þetta fram með formlegum hætti. Einstein (1905) skilgreindi sams konar hugtak til að lýsa ófyrirsjáanleika í hreyfingu mólekúla. Áður hafði skoski líffræðingurinn Brown (1827) hugsað á svipuðum nótum þegar hann lýsti smásjárathugunum sínum. Stærðfræðingurinn Wiener sýndi fram á tilvist hugtaks af þessari gerð, Wiener (1923). Þetta slembiferli er síðan nefnt ýmist „Brownian motion" eða „Wiener-process".

3 Empírskar athuganir

Kendall (1953) túlkar niðurstöður sínar á þann hátt að verðbreytingar hlutabréfa og annarra spekúlatívra eigna sé ekki spáanlegt. Fisher and Loire (1964) völdu bréf af handahófi úr nýsköpuðum gagnagrunni og sýndu að slík karfa gaf körfum sem atvinnufjárfestar stýrðu lítt eftir.

Kenningar Bachelier voru lítt þekktar fram eftir öldinni. En með verki Black and Scholes (1973) komust kenningar hans í hámæli. Notkun Brown/Wiener-ferli hefur síðan verið áberandi í stærðfræðilegri fjármálafræði.

Á tölvuöld hefur aðgengi að gögnum stórbatnað. Þar með hefur aðstaða til empírískra rannsókna á fjármálamörkuðum gjörbreyst. Sé ávöxtun hlutabréfa óspáanleg ætti sjálffylgnifall ávöxtunar að vera núll. Í fjölda empírískra rannsókna hafa menn ályktað að sjálffylgnifallið er marktækt frábrugðið núll. Síðan hafa menn velt fyrir sér hvort þetta þurfi að vera í mótsögn við EMH. Fram hafa komið hugmyndir um að ákveðin kerfi á markaðnum stuðli að sjálffylgnimynstri í mældum gögnum þó svo að markaðurinn sé skilvirkur. Nánar má lesa um þetta í t.d. Campbell et al. (1997) eða Cuthbertson (1996). Fræðin um það áhrif viðskiptareglna á mörkuðum á er nefnd „market-microstructure theory". Í O'Hara (1995) er sagt orðrétt: *While much of economics abstracts from the mechanism of trading, the microstructure literature analyzes how specific trading mechanism affect the price formation process.* Það er því ríkjandi skilningur á að mæld frávik frá EMH séu ekki endilega í mótsögn við EMH.

4 Gagnasöfnunarferli og raunferli

Þegar notuð eru strjál gögn á verðbréfamörkuðum er í gangi ákveðið gagnasöfnunarferli (e. sampling process) sem ber að aðgreina frá hinu raunverulega verðmyndunarferli. Verð ákveðinnar eignar á markaði er til á sérhverjum tímapunkti. Eiginleikar mælds ferlis geta verið aðrir en raunferlis. Þetta er best skýrt með dæmi úr Working (1960) sem sýnir að ef daglegur slembigangur:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

er mældur mánaðarlegar þá mun fyrstu gráðu sjálffylgni í mánaðarlegum breytingum verða u.þ.b. 1/4, þ.e. að til verður sjálffylgnimynstur vegna gagnasöfnunaraðferðarinnar þó að sanna líkanið hafi ekkert slíkt mynstur. Hér er fræðilega ferlið hreint ARIMA(0,1,0) en mælda ferlið verður ARIMA(0,1,1). Sé truflandi þáttum eins og t.d. mæliskekkju bætt við þá verður þetta enn flóknara. Nánari hugleiðingar um þetta má t.d. lesa í Granger (1999).

Í dæmi Working í jöfnu (1) er gengið út frá sönnu líkani í stjrálum (discrete) tíma. Við val á formi líkans blandast sjónarmið um lipurð og raunsæi. Hér er farin sú leið að ganga út frá líkani í samfelldum tíma. Sá kostur er valinn því að verðmæti eignar er til í sérhverjum tímapunkti. Gengið er út frá því að verðbreyting sé sundurliðuð í fyrirsjáanlegan hluta og ófyrirsjáanlegan hluta. Þetta er sett fram stærðfræðilega með slembinni diffurjöfnu (e. stochastic differential equation).

5 Um vísitölur

Vísitala er hlutlægt hugtak sem oft er notað til að mæla breytingu tiltekinnar stærðar yfir tíma. Hér er leitast við að skilgreina vísitölu á markaði með strjálum viðskiptum. Slíkir markaðir einkennast af óvissu vegna mistíðra viðskipta. Ein aðferðafræði við uppbyggingu á vísitölum er svokölluð slembin nálgun (e. stochastic approach). Sú nálgun gengur út á að túlka vísitöluna sem mat á væntanlegu gildi og gefa síðan upp staðalfrávik á því mati. Þá má túlka staðalfrávikið sem mælikvarða á óvissuna um verðlagið, eða það sem vísitalan á að mæla. Gróflega má lýsa þessu með eftirfarandi:

$$\frac{p_{it}}{p_{i0}} = \gamma_t + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Hér táknar γ_t sameiginlega leitni í öllum verðum og ε_{it} er frávik vöru i frá leitninni. Sé gert ráð fyrir að $V(\varepsilon_{it}) = \sigma_t^2$ og að $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = 0$ ef $i \neq j$ þá má meta γ_t:

$$\hat{\gamma}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{it}}{p_{i0}} \quad \text{og} \tag{3}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - \hat{\gamma}_t)^2 \tag{4}$$

Ef helmingur vörutegunda hækkar frá tíma 0 til tíma t um 100% og hinn helmingurinn lækkar um 50% þá er augljóslega um annað ástand í hagkerfinu en þegar engar verðbreytingar eru.

Þetta ástand má túlka sem að meiri óvissa sé um verðbreytingu. Slembin nálgun útfærð nánar í Selvanathan and Rao (1994). Ofangreind nálgun á vel við þar sem óvissa er áhugaverð og mælingar á öllum verðum eru fáanlegar í hverjum tímapunkti.

6 Fallform vísitölu

Gerum ráð fyrir n vöruflokkum og að viðfangsefnið sé að meta verðþróun frá tímabili 0 til t. Verð vöru i á tíma 0 er p_{i0} og magnið q_{i0}. Samsvarandi gildir um tíma t. Úr kennslubókum er Laspeyres og Paasche vísitölur vel þekktar.

$$P_{0t} - Laspeyres = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \tag{5}$$

$$P_{0t} - Paasche = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Formúlur fyrir Laspeyres, jafna (5) og Paasche, jafna (6) eru samhverfar. Laspeyres notar magnið á tímapunkti 0 sem viðmiðun en Paasche notar magnið á tíma punkti t sem viðmiðun. Þekkt form er að fara bil beggja og reikna geometrískt meðaltal af Laspeyres og Paasche:

$$P_{0t} - Fisher = [(P_{0t} - Laspeyres)(P_{0t} - Paasche)]^{1/2} \tag{8}$$

sem þekkt er sem Fisher-ideal vísitala. Við val á formi vísitölu hafa menn sett fram ýmis skilyrði sem talin eru æskileg. Dæmi eru t.d

$$P(p_0, p_t, q_0, q_t) > 0 \tag{9}$$

$$P(p, p, q_0, q_t) = 1 \tag{10}$$

$$P(p_0, cp_t, q_0, q_t) = cP(p_0, p_t, q_0, q_t) \tag{11}$$

$$P(p_0, p_t, cq_0, cq_t) = P(p_0, p_t, q_0, q_t) \tag{12}$$

$$P(p_0, p_s, q_0, q_s)P(p_s, p_t, q_s, q_t) = P(p_0, p_t, q_0, q_t) \tag{13}$$

Hér táknar p_0 og p_t verð á tímum 0 og t og q_0 og q_t magn á tímum 0 og t. Jafna (9) segir að vísitala skuli vera jákvæð, jafna (10) segir að magnbreyting skuli ekki hafa áhrif, jafna (11) segir að ef verðvektor er margfaldaður með fasta megi í staðinn margfalda vísitöluna með fasta. Jafna (12) og útvíkkuð útfærsla hennar segir að einingabreyting í magni skuli ekki hafa áhrif á vísitölu. Jafna (13) gerir ákveðna kröfu um samkvæmni yfir tíma. Selvanathan and Rao (1994) segja að nauðsynleg og nægjanleg skilyrði til þess að vísitala uppfylli (9-13) sé að vísitalan á forminu:

$$P_{0t} = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{p_{it}}{p_{0t}} \right]^{w_i} \tag{14}$$

Í jöfnu (14) táknar w_i vægi þáttar i í vísitölunni. Jafna (14) minnir á Cobb-Douglas fall. Meðal þekktra vísitalna sem byggja á jöfnu (14) er Theil-Tornqvist, sjá nánar í t.d. Selvanathan and Rao (1994). Fisher-ideal uppfyllir mörg skilyrða sem talin eru æskileg, fleiri en t.d. þau sem byggja á Cobb-Douglas formi. Fisher-idea vísitala uppfyllir þó ekki jöfnu (13). Fjölskylda af vísitölum sem hafa áhugaverða eiginleika eru Divisia-vísitölur. Þær má skilgreina sem vegið meðaltal breytinga á logaritma verða:

$$Dlog(P_t) = \sum_{i=1}^{n} w_{it} Dlog(p_{it}) \tag{15}$$

Með $Dlog(P_t)$ er átt við $log(P_t) - log(P_0)$, þar sem P_t er vísitalan á tíma t og $Dlog(p_{it})$ skilgreint á hliðstæðan hátt fyrir einstakar vörutegundir. Ljóst er að jöfnur (15) og (14) eru náskyldar. Einnig er ljóst að Divisia vísitölu er auðvelt að skilgreina í samfelldum tíma, þ.e. með því að láta t nálgast 0 og skilgreina $Dlog(p_{it})$ fyrir sérhverja vörutegund. Á sérhverjum tíma er einnig hægt að skilgreina mælikvarða á breytileika milli tegunda í sérhverjum tímapunkti.

$$\Pi_t = \sum_{i=1}^{n} w_{it} [Dlog(p_{it}) - Dlog(P_t)]^2 \tag{16}$$

Π_t er kalla „Divisia-price-variance" og samsvarar σ_t^2 í jöfnu (4).

7 Útfærsla fyrir verðbréfamarkaði með strjálum viðskiptum.

Verð eigna er til í sérhverjum tímapunkti. Því er valin sú leið hér að skilgreina verðhreyfingar í samfelldum tíma með slembnum diffurjöfnum (e. stochastic differential equaiton) fyrir hvert fyrirtæki á markaðnum.

$$Dlog(p_{it}) = dP_t dt + \sigma_i DW_i \tag{17}$$

Þar sem W_i er Wiener-ferli sem drífur ferlið áfram. Skilgreiningin er anda kaflans hér á undan í jöfnu á þann hátt að dP_t kemur í stað γ_t og dW_i er „hvítur hávaði" (e. white noise) í samfelldum tíma kemur í stað ε_{it}. Á verðbréfamörkuðum eiga viðskipti sér ekki stað samtímis með þær eignir sem viðskipti eru með (e. non-synchronous trading). Í umhverfi strjálla viðskipta er þetta áberandi einkenni sem og að viðskiptatíðni er mismikil. Hefðbundnar aðferðir við notkun á „closing-prices" geta því verið að enduróma mjög misgamlar upplýsingar. Í tölfræðilegum skilning má túlka „closing-prices" sem spá um verð á ákveðnum tímapunkti. Þar sem síðastu viðskipti eru síðasta raunverulega mælingin og tímasetning þeirra frá lokun markaða er mismikill er ljóst að gæði þeirra spádóma er mismunandi.

Annað atriði sem einkennir markaði að ýmist er verið að taka kauptilboði eða sölutilboði. Á þeim er eðlilega munur. Einnig er á sumum mörkuðum skráð mismunandi verð á sömu sekúndu. Þar sem eðlilegt er að gera ráð fyrir að á hverjum tíma sé aðeins eitt satt verð eru mæld verð í viðskiptum túlkuð hér sem „noisy" mælingar á sönnu verði.

Í hnotskurn er vandinn að verð eru mæld með mæliskekkju á mismunandi tímum og ekki er hægt að stjórna úrtaksferlinu (e. sampling process). Gert er ráð fyrir að verðbreytingar fyrirtækja hvíli á einni sameiginlegri leitni en séu að öðru leiti óháðar.

8 Uppsetning líkans

Unnið er með líkan í samfelldum tíma. Gert er ráð fyrir n eignum á markaði verðmæti þeirra á tíma t er táknað með vektornum $\boldsymbol{p}'(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Í samræmi við jöfnu (15) er gert ráð fyrir að gefin sameiginleg verðleitni $P(t)$ séu hnitin í $\boldsymbol{p}$ óháð.

$$dlog(p_i(t)) = d\alpha_i(t) = dlog(P(t)) + \sigma_i dW_i \tag{18}$$

$$dlog(P(t)) = d\alpha_c(t) = \mu(t)dt + \sigma_c dW_c \tag{19}$$

Jöfnur (18-19 eru dæmi um kerfi af línulegum slembnum diffurjöfnum sem allmennt má rita á fylkjaformi sem:

$$d\boldsymbol{\alpha}(t) = A\boldsymbol{\alpha}(t)dt + \boldsymbol{b}dt + Cd\boldsymbol{W} \tag{20}$$

þar sem A, $\boldsymbol{b}$ og C eru fylki og vektorar af viðeigandi vídd, og $\boldsymbol{W}$ er Wiener-ferli af viðeigandi vídd. Væri gögum safnað í samfelldum tíma væri auðvelt að reikna Divisia-vísitölur og Divisia-variance úr jöfnum (15) og (16). Þegar mælingar eru strjálar breytist dæmið. Sé línuleg slembin diffurjafna (20) leyst í tímapunkti t_i gefið upphafsgildi í t_{i-1} fæst:

$$\boldsymbol{\alpha}(t_i) = e^{A\delta_i}\boldsymbol{\alpha}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A(s-t_{i-1})}ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A(s-t_{i-1})}Cd\boldsymbol{W}(s) \tag{21}$$

Í einfalda líkaninu í jöfnum (18-19) er $A = 0$ og því lausnin afar einföld:

$$\boldsymbol{\alpha}(t_i) = \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1}) + \mu(t_i - t_{i-1}) + C[\boldsymbol{W}(t_i) - \boldsymbol{W}(t_{i-1}] \tag{22}$$

Ástandi markaðar á tíma t er lýst með vektornum $\boldsymbol{\alpha}(t)$. Tenglsum milli tveggja tiltekinna mælipunta er lýst með jöfnum eins og t.d. (21). Ástandið er dulið og nauðsynlegt er að álykta um það út frá mælingum. Þegar einstök viðskipti eiga sér stað fæsti „noisy" mæling á einstökum hnitum. Ástandsform (e. state-space-form) líkans lýsir þessu vel. Ástandsformið er samsett úr mælijöfnu:

$$y(t_i) = Z(t_i, j(i))\boldsymbol{\alpha}(t_i) + \varepsilon_{i,j(i)} \tag{23}$$

og ástandsjöfnu:

$$\boldsymbol{\alpha}(t_i) = \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1}) + \mu\delta_i + \boldsymbol{\xi}(t_i, t_{i-1} \tag{24}$$

Í jöfnum (23) og (24) koma fyrir tvenns konar slembiliðir. Í jöfnu (23) táknar $\varepsilon_{i,j(i)}$ frávik, með meðaltal 0, frá sönnu verði með fyrirtæki númer $j(i)$. $V(\varepsilon_{i,j(i)}) = \sigma^2_{\varepsilon,j}$ þarf að vera skilgreint en að öðru leyti þarf ekki að skilgreina dreifingu $\varepsilon_{i,j(i)}$. Hins vegar er gert ráð fyrir að $\boldsymbol{\xi}(t_i, t_{i-1})$ sé normaldreift með meðaltal 0 og:

$$V(\boldsymbol{\xi}(t_i, t_{i-1})) = \delta_i \begin{bmatrix} \sigma_c^2 + \sigma_1^2 & \sigma_c^2 & \dots & \sigma_c^2 \\ \sigma_c^2 & \sigma_c^2 + \sigma_2^2 & \dots & \sigma_c^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \sigma_c^2 & \dots & \dots & \sigma_c^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Kalman síu jöfnur gefa „optimal" (MMSE) mat á ástands vektornum, $\boldsymbol{\alpha}(t)$, ásamt covarians-fylki matsins, $\boldsymbol{P}(t)$, fyrir öll t.

Allar upplýsingar sem gögnin (viðskiptin) gefa í þessu líkani eru nú í vektornum, $\boldsymbol{\alpha}(t)$, og fylkinu $\boldsymbol{P}(t)$. Það er venja að láta $\boldsymbol{\alpha}(t|s)$ og $\boldsymbol{P}(t|s)$ tákna ályktun um tímapunkt t gefnar upplýsingar á tímapunkti s.

9 Myndun vísitölu

Ástandsvektorinn er í þessu tilfelli túlkaður sem logaritmi verðs á tilteknum tíma. Það liggur því beint við að tákna vísitölu á tíma t sem:

$$I(t) = \boldsymbol{w}'(t)\boldsymbol{\alpha}(t) \tag{26}$$

Óvissu í vísitölunni má fá með venjulegum reiknireglum um varíans:

$$\begin{aligned} V(I(t)) &= \boldsymbol{w}(t)V(\boldsymbol{\alpha}(t))\boldsymbol{w(t)} &(27)\\ &= \boldsymbol{w}(t)'\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{w}(t) &(28)\end{aligned}$$

Ef vogir, $\boldsymbol{w}(t)$ eru fastar þá mun $V(I(t))$ stefna á óendanlegt ef hætt er viðskiptum með fyrirtæki með pósitíva vog, þ.e. vissan um matið í þeirri hnit ástandsvektorsins hverfur. Því er æskilegt að vog hafi þann eiginleika að þegar upplýsingar um tiltekna hnit $\boldsymbol{\alpha}(t)$ eru horfnar þá verður vogin 0. Hægt er að leysa þennan vanda með því að láta vogina vera í öfugu hlutfalli við óvissu í mati á ástandi. Ef jafna (27) er lágmörkuð með hliðarskilyrðinu að summa voganna sé einn, þ.e.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{w}(t)'\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{w}(t) &(29)\\ \text{skilyrt að } & \boldsymbol{w}(t)'\mathbf{1} = 1 &(30)\end{aligned}$$

Það er vel þekkt að sá vektor $\boldsymbol{w}(t)$ sem leysir skilyrta lágmörkunarvandamálið í jöfnum (29-30) er:

$$\boldsymbol{w}(t) = \frac{\boldsymbol{P}(t)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{P}(t)^{-1}\mathbf{1}} \tag{31}$$

Lausnin í jöfnu (31) hefur þann eiginleika að ef upplýsingar stefna á óendanlegt, þ.e. óvissa á núll þá stefnir $\boldsymbol{w}(t)$ á $1/n$ þar sem n er fjöldi fyrirtækja á markaðnum. Í þessari lausn vega því öll fyrirtæki jafnt. Auðveldlega má breyta áherslum í $\boldsymbol{w}(t)$ á þann hátt að við fullkomna vissu sé vogin t.d. tengd fjölda útgefinna bréfa, breytist í tíma við útgáfu jöfnunarbréfa o.s.frv. Þannig fæst vog $\boldsymbol{w}^*(t)$ sem er í senn vegin með gæðum upplýsinga og t.d. stærð og verðmæti fyrirtækis. Ofangreindar hugleiðingar má tengja við vel þekktar formúlur um vegið meðaltal.

Meðaltal óháðra hendingar með mismunandi varíans má vega saman á þann hátt að óvissari hendingar fá minna vægi en aðrar. Jafna, hliðstæð jöfnu (31), liti þá þannig út:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum 1/\sigma_i^2 X_i}{\sum 1/\sigma_i^2} \tag{32}$$

Þetta er lausn sem miðast við að lágmarka varíans vegna meðaltalsins. E.t.v. þykir þetta gefa of sveiflukennda lausn, þá er t.d. hugsanlegt að hafa vogina í öfugu hlutfalli við staðalfrávik í stað varíans:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum 1/\sigma_i X_i}{\sum 1/\sigma_i} \tag{33}$$

Vel er hugsanlegt að beita sömu hugmynd hér í því tilfelli að hendingar eru ekki óháðar. Ef $\boldsymbol{P}(t)$ er Choleski-þáttað

$$\boldsymbol{P}(t) = L(t)L(t)' \tag{34}$$

þar sem $L(t)$ er neðra þríhyrningsfylki. Síðan er í stað $\boldsymbol{w}(t)$ í jöfnu (26) sett $\boldsymbol{w}^*(t)$

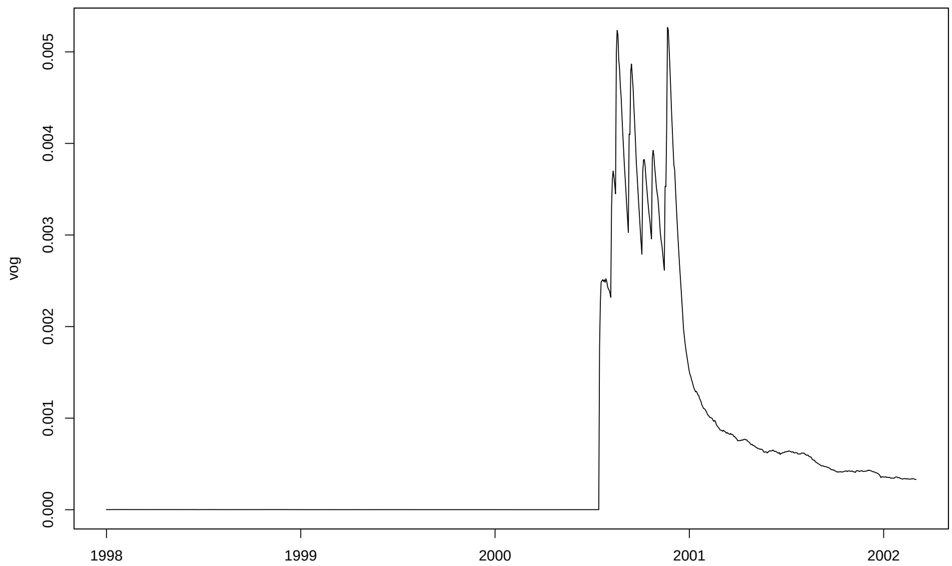
$$\boldsymbol{w}^*(t)\alpha(t) = \frac{\boldsymbol{w}(t)'L(t)^{-1}\boldsymbol{\alpha}(t)}{\sum L(t)^{-1}\boldsymbol{w}(t)} \tag{35}$$

Með þessum aðferðum fæst óvissu-tengd vog sem fjarlægir óvirk bréf úr vísitölu, en vel ákvörðuð bréf fá aukið vægi. Þetta hefur þó þann galla að bréf sem skyndilega er verslað mikið með fá aukið vægi á kostnað annara. Þ.e. að skyndilegar breytingar á upplýsingum geta haft mikil áhrif á vog, jafnvel þó að vogin sé í öfugu hlutfalli við staðalfrávik í stað varíans. Þessar reglur útiloka heldur ekki neikvæðar vogir. Svipuðum vogum má ná fram með hugmyndum eins og Ridge-regression, empírískum Bayes aðferðum. Sé mönnum illa við að sum bréf geti fengið neikvæðar vogir mætti beita eins konar „positive-rule" James-Stein metlum.

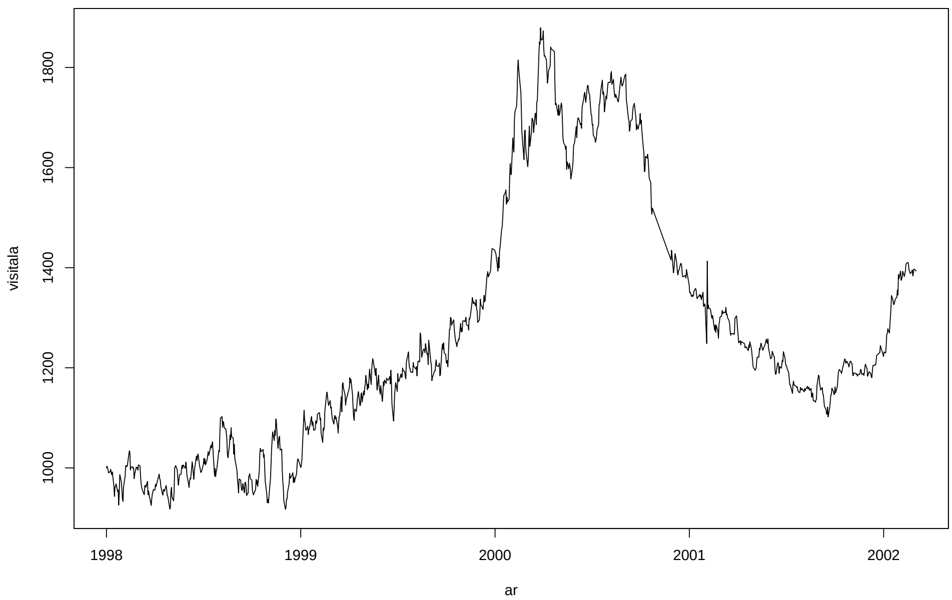
Á mynd 1 sést hvernig óvissutengd vog getur sveiflast yfir tíma. Ég tel að flestum þyki þessar sveiflur of miklar. Til að ráða bug á því má krefjast þess að vogin sé sléttari ferill. Til að verðskulda vog í vísitölu er æskilegt að saman fari vel ákvarðað verð og regluleg viðskipti yfir langan tíma. Í dæminu sem er gefið hér er þetta leyst með því að láta vogina einungis breytast daglega með exponential smoothing formúlu.

$$\hat{\boldsymbol{w}}(t) = \lambda \boldsymbol{w} * (t) + (1 - \lambda)\hat{\boldsymbol{w}}(t - 1) \tag{36}$$

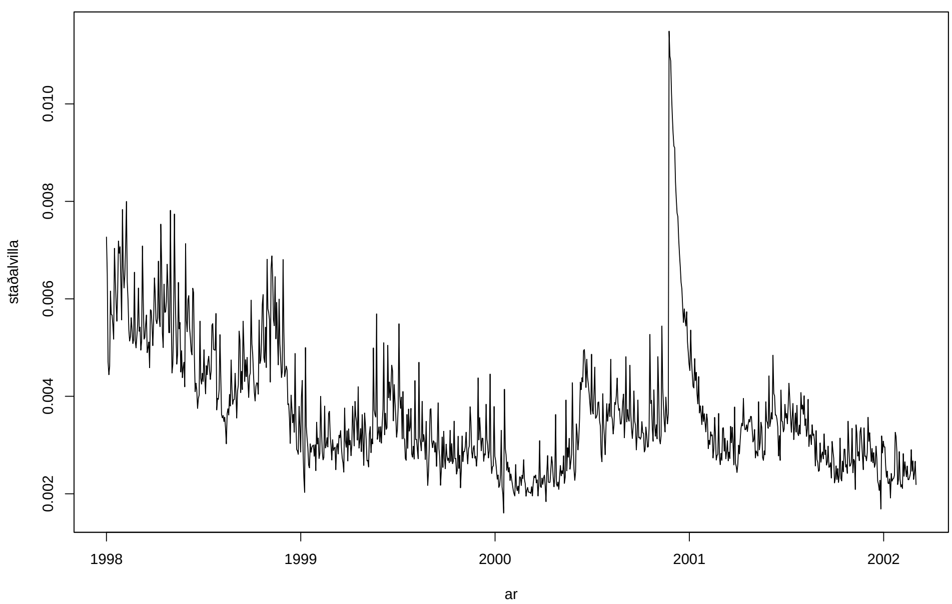
Á mynd 2 sést vísitala þannig reiknuð frá 1991, með 1.1.1998=1000. Hér var notað $\lambda = 0.8$ fyrir tímabilið fram að 1.1.1998, $\lambda = 0.9$ frá 1.1.1998 til 1.1.2001 og $\lambda = 0.95$ eftir 1.1.2001. Vogin er búin þannig til að öll fyrirtæki vega jafnt þegar engin óvissa er og ekki er tekið tillit til arðs, jöfnunar eða stærðar fyrirtækis. Þessi vísitala er fall af mati á ástandi markaðar $\boldsymbol{\alpha}(t)$ og metinnar óvissu $\boldsymbol{P}$. Hægt er að reikna óvissu í vísitölunni, eins konar „standard-error-of-the-mean", með því að nota jöfnu (27). Slíkt staðalfrávik er sýnt á mynd 3. Hár toppur í grennd við áramótin 2000/2001 gæti skýrst af breytingu í gagnavinnslu. En í nóvember 2000 var tekin upp alsjálfvirk gagnaöflun. Til að fá hlutlæga mynd af því hvort einstök fyrirtæki séu að sýna mikil frávik frá almennri verðþróun má nálga Divisia-varians úr jöfnu (16). Á mynd 4 er t.d. sýndur daglegur Divisia-variance. Háu topparnir eru líklega gallar í gögnum. Til að framkvæma þessa reikninga er nauðsynlegt að hafa mat á stærð sameiginlegra skella σ_c, stærð á skellum á sérhvert fyrirtæki σ_i úr jöfnu (25) sem og mat á stærð fráviks einstakra viðskipta frá sönnu verði, $\sigma_{\varepsilon,i}$. Þá stika má meta með maximum-likelihood aðferð og er matsaðferð lýst nánar í Tómasson (2000c). Sléttunarstikinn λ er hins vegar huglægt metinn og hliðstæður þeirri ákvörðun að endurskoða úrvalsvísitöluna á 6 mánaða fresti.



Mynd 1: Dæmi um þróun óvissutengdrar vogar.



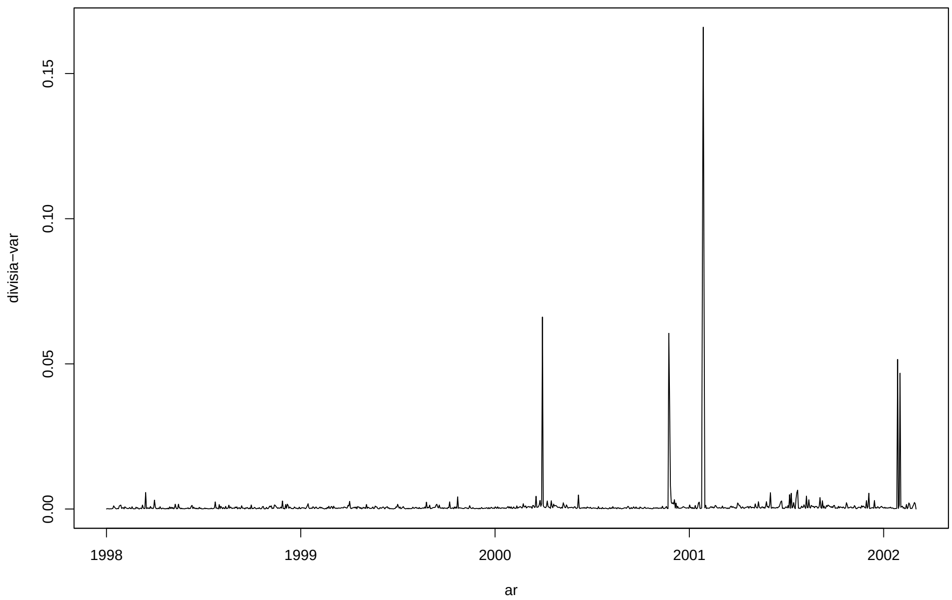
Mynd 2: Dæmi um vísitölu.



Mynd 3: Staðalvilla metinnar vísitölu.

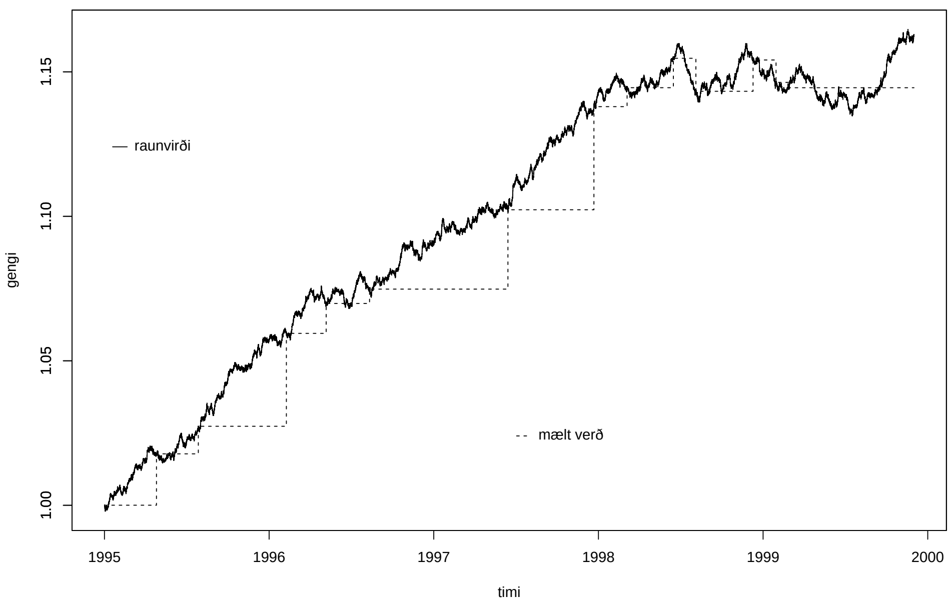
10 Umræða og niðurstöður

Í kaflanum hér á undan var sýnt ákveðið ferli sem dæmi um það hvernig reikna má hlutlæga vísitölu fyrir hlutabréfaverð. Ná má samskonar markmiðum og úrvalsvísitalan sækist eftir, þ.e. stór fyrirtæki sem mikið er verslað með hafa mikið vægi. Úrvalsvísitalan tekur inn ákveðinn fjölda fyrirtækja háð því hvernig viðskipti með þau voru á 6 mánaðatímabili, önnur fyrirtæki fá vogina núll. Þegar dregur að lokum slíks 6 mánaða tímabils getur vel verið ljóst hvaða fyrirtæki eru á leið út og hver inn. Vísitala byggða á aðferðunum hér að ofan tekur allar slíkar upplýsingar inn jafnóðum. Skekkjumörk eru fáanleg í hverjum tímapunkti bæði fyrir vísitölu og sérhvert fyrirtæki. Stærð þeirra skekkjumarka eru háð stikunum í fylkinu $\boldsymbol{Q}$ úr jöfnu (25). Segja má að hefðbundna vísitölu sem einungis byggir á síðasta söluverði óháð því hversu gamalt það er megi fá út með því að setja hornalínustök $\boldsymbol{Q}$ jaft óendalegu. Spámörk spár sem notar slíkt $\boldsymbol{Q}$ yrðu þá líka óendanlega víð. Ástandi strjálla viðskipta má lýsa með myndi 5. Á mynd 5 sést ímyndaður sannur verðferill ásamt mældu viðskiptaverði. Í þeirri nálgun sem að ofan er lýst er gengið út frá líkani þar sem fyrirtæki eru óháð fyrir utan einn sameiginlegan verðþátt. Þetta er í samræmi við vísitöluuppbyggingu í t.d. Selvanathan and



Mynd 4: Metinn daglegur Divisia-varíans

Rao (1994). Vel er hægt að hugsa sér að fleiri þættir séu ráðandi, t.d. gætu fyrirtæki verið misnæm fyrir gengisáhættu á gjaldeyrismörkuðum. Til að geta tjáð sig um slíkt þarf að meta almennara form á fylkinu $\boldsymbol{Q}$ en gefið er í jöfnu (25). Það form er metið í Tómasson (2000a). Stærð eigingilda fylkisins gefa vísbendingar um vægi þátta í verðbreytingum. Á mynd 6 sést að fyrsta eigingildið er langstærst, þ.e. að einn þáttur ræður mestu um breytingar á verði. Í tengslum við þá vinnu sem hefur verið unnin við þessa gagnagreiningu hefur verið þróuð aðferð í svipuðum anda sem mælir „liquidity", í form biðtíma eftir næstu viðskiptum. Sett er upp biðtímalíkan sem lýsir mat á ástandi markaðar og eftir því sem upplýsingar berast um viðskipti er mat á ástandi uppfært. Þessu er nánar lýst í Tómasson (2000b). Í allri þessari vinnu er gangurinn sá sami, þ.e. upplýsingar um ástand, (verð, óvissa, væntalegur biðtími) eru uppfærðar með reglu Bayes. Þetta er því í ákveðnum skilningi hlutlæg aðferðafræði og veitir notendum ákveðinn kvarða í umgengni við upplýsingar. Gagnasemin er m.a. fólgin í því að ekki verður spurt að því hvort hægt sé að segja eitthvað um ástand markaðar heldur hversu nákvæmlega er hægt að tjá sig. Hlutlægt mat á spáskekkjum þannig að ef um of stór eða lítil frávik er að ræða er hægt að bregðast við og athuga hvort allt sé með felldu.



Mynd 5: Þróun raunverð og mælds verðs

Þakkir

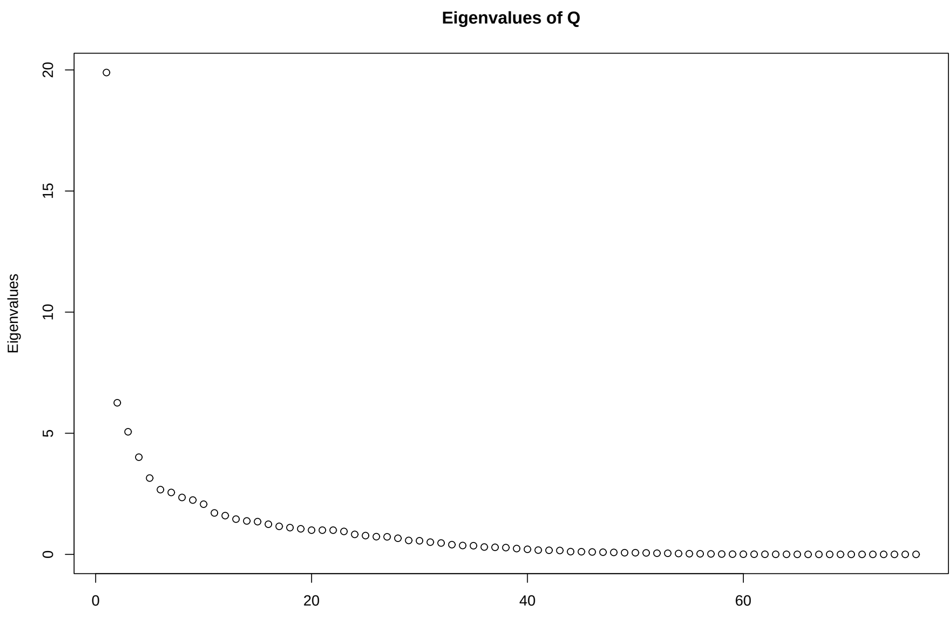
Þetta verkefni hefur verið styrkt af Rannsóknarframlagi bankanna, Rannís og Rannsóknarsjóði Háskóla Íslands. Starfsfólk Verðbréfaþings Íslands hefur aðstoðað við gagnaöflun. Starfsfólk við Hagfræðistofnun Háskóla Íslands og Viðskipta- og Hagfræðideild hefur aðstoðað á ýmsan hátt. Starfsmenn hjá Mensmentis hafa gefið holl ráð við gagnaflutning. Einnig hafa nemendur mínir og málstofugestir á ýmsum málstofum innan lands og utan gefið góð ráð og leiðbeiningar.

Heimildir

Bachelier, L. (1900). Theorie de la speculation. *Annales de l'Ecole Normale Superiore*, (17):21–86.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, (81):635–654.

Brown, R. (1827). *A brief account of microscopical observations.* óútgefið, London.



Mynd 6: Metin eigingildi $\boldsymbol{Q}$-fylkis

Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinley, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

Cuthbertson, K. (1996). *The Quantitative Analysis of Financial Economics*. Wiley.

Einstein, A. (1905). On the movement of small particles suspended in a stationary liquid by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, (17):549–560.

Fisher, L. and Loire, J. (1964). Rates of return on investment in common stocks. *Journal of Business*, 37:1–24.

Granger, C. W. (1999). *Empirical Modelling in Economics*. Cambridge University Press.

Kendall, M. G. (1953). The analysis of time series, part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, 96:11–25.

O'Hara, M. (1995). *Market Microstructure Theory*. Blackwell Publishers.

Selvanathan, E. A. and Rao, D. S. P. (1994). *Index Numbers: A Stochastic Approach*. MacMillan Press, Ltd.

Tómasson, H. (2000a). Estimation of correlations in financial markets when trading is infrequent. Working Paper W00:18, The Institute of Economic Studies at the University of Iceland.

Tómasson, H. (2000b). Monitoring trading intensity of a stock market under infrequent trading. Technical Report W:20, The Institute of Economic Studies at the University of Iceland.

Tómasson, H. (2000c). Signal-noise decomposition in financial markets: an empirical stochastic process analysis for infrequent trading. Working paper W00:11, The Institute of Economic Studies at the University of Iceland.

Wiener, N. (1923). Differential space. *Journal of Mathematical Physics*, 2:131–174.

Working, H. (1960). Note on the correlation of first differences of averages in a random chain. *Econometrica*, 28(4):916–918.