

# Leikjafræði - leikur eða fræði?

## Inngangur

Undanfarin fjögur ár hafa Nóbelsverðlaunin í hagfræði í tvígang runnið til hagfræðinga sem einkum hafa getið sér frægðar fyrir notkun leikjafræði í hagfræði. Árið 1994 fengu þeir John Harsanyi, John Nash og Reinhard Selten verðlaunin fyrir framlag til þróunar leikjafræði og árið 1996 þeir James Mirrlees og William Vickrey fyrir rannsóknir sem byggja mjög á leikjafræði. Fyrir leikmenn kann þetta að þykja galgopaháttur af hálfu hinnar virðulegu sænsku akademíu; er verið að verðlauna fólk fyrir að leika sér? Því fer þó fjarri, leikjafræði kann að vera skemmtileg fræðigrein en hún er enginn leikur.

## Hvað er leikjafræði?

Sem nafn á fræðigrein er leikjafræði hálfgerður óskapnaður. Slíkt heiti er ekki líklegt til að ávinna grein virðingu leikmanna. Það er vart hægt að lá neinum sem lítt þekkir til að telja að viðfangsefni fræðimanna á sviði með þessu nafni séu snú-snú, póker og stórfiskaleikur. Það er ekki heldur rangt, svo langt sem það nær. Það nær þó ekki mjög langt. Hægt er að nota leikjafræði til að greina það sem í daglegu tali eru kallaðir leikir en meiru skiptir að með tækjum hennar er hægt að greina ýmislegt í samskiptum manna sem við fyrstu sýn virðist ekki eiga mikið sameiginlegt með leikjum.

Leikjafræði fjallar um þau samskipti manna - eða annarra - þar sem athafnir eins hafa áhrif á hag og athafnir annarra. Þetta er augljóslega afar víðtækt svið. Einn fremsti leikjafræðingur þessarar aldar, Robert Aumann, telur að ef til vill ætti frekar að kalla hana „gagnvirka ákvarðanafræði“ (*Interactive Decision Theory*) og bætir við: „Leikjafræði er eins konar regnhlíf eða þverfagleg umgjörð sem nær til allra þeirra sviða félagsvísinda sem gera ráð fyrir rökréttri hegðan viðfangsefna sinna - þar sem „félags“-

forskeytið er túlkað vítt og nær yfir jafnt mennska sem ómennska (tölvur, dýr, plöntur). Ólíkt öðrum aðferðum sem notaðar eru í greinum eins og hagfræði og stjórnmálafræði, notar leikjafræði ekki mismunandi og sérsníðuð tæki til að greina hin ýmsu viðfangsefni, svo sem fullkomna samkeppni, einkasölu, fákeppni, alþjóðaviðskipti, skattlagningu, atkvæðagreiðslu, hindranir og svo framvegis. Í staðinn hefur hún þróað aðferðir sem eiga í grundvallaratriðum við um *allar* gagnvirkar aðstæður og síðan er athugað að hvaða niðurstöðu þessar aðferðir leiða fyrir hvert viðfangsefni.“<sup>2</sup>

## Forsendur leikjafræði

Hvert sem viðfangsefnið er eiga líkön leikjafræðinga það sameiginlegt að í þeim er ákveðnu kerfi lýst með því að tiltaka hverjir taka ákvarðanir í því, hvaða valkosti þeir eiga, hvaða hagsmuna þeir eiga að gæta, hvaða upplýsingar þeir hafa og hvaða leikreglur eru rammi samskipta þeirra. Yfirleitt er gert ráð fyrir að aðilar taki rökréttar ákvarðanir sem miða að því að hámarka eigin hag en það er þó ekki algilt. Sum áhugaverðustu líkön leikjafræðinnar gera ráð fyrir að stundum geri menn mistök eða að þeir skilji suma leiki ekki fullkomlega, að geta þeirra

1. Kveikjan að þessari grein var fyrirlestur sem höfundur hélt á fundi Aðgerðarannsóknafélags Íslands.

2. Aumann, 1989, bls. 2, þýð. G.M.

til að greina áhrif ákvarðana sinna og annarra sé takmörkuð.

Forsendan um rökrétt hegðun er ein sú lífseigasta í leikjafræði. Hún er jafnframt sú umdeildasta enda er leikjafræðingum jafnljóst og öðrum að fólk hugsar ekki alltaf rökrétt. Þegar litið er á hve mikla hugsun þarf til að greina ákveðin kerfi virðist óverjandi að gera ráð fyrir að allir geti greint þau rétt. Það eru jafnvel til kerfi sem leikjafræðingar vita að eru greinanleg í þeim skilningi að það *er til* lausn á leiknum sem verið er að leika en það er ekki hægt að *finna* hana eða það hefur að minnsta kosti engum tekist það enn. Til að skýra þetta er hægt að líta á tvo leiki sem frá sjónarhóli leikjafræði eru mjög svipaðir, mylla og skák. Í myllu eru eitt-hvað innan við 9! eða 362.880 möguleg afbrigði. Í skák eru þau umtalsvert fleiri en að öðru leyti eru þessir leikir sambærilegir frá sjónarhóli leikjafræði. Það hefur verið vitað síðan 1913 að það væri til lausn á þessari tegund leikja og þarf það varla að koma neinum á óvart hvað myllu áhrærir.<sup>3</sup> Í myllu er lausnin augljóslega sú að jafntefli verður; leikur tveggja leikmanna sem hugsa rökrétt mun ætíð enda í jafntefli. Það þarf ekki einu sinni mikla hæfileika til rökhugsunar til að leikur endi með þessari niðurstöðu, börn geta hæglega orðið ósigrandi í myllu. Hægt er að sanna að hið sama á við um skák, leikur tveggja aðila sem greina leikinn rétt mun ætíð enda á sama hátt, þ.e. það *er til* lausn.<sup>4</sup> Vandinn, ef einhver er, er auðvitað sá að það hefur engum tekist að finna lausnina og það er ekkert útlit fyrir að það takist, reiknigetan sem til þyrfti er slík að enginn mannsheili hefur yfir henni að ráða og tölvur nútímans komast litlu lengra - og raunar ekki útlit fyrir að tölvum framtíðarinnar takist það heldur á næstu áratugum þótt þær séu nú þegar orðnar mannsheilanum fremri í skák. Það er því augljóslega rangt að gera ráð fyrir að skákmenn muni ætíð leika rétt.

3. Heiðurinn af þessari uppgötvun á þýski stærðfræðingurinn Ernst Zermelo (1913).
4. Í lausninni hlýtur að felast að úrslitin verða alltaf þau sömu (þ.e. hvítur vinnur alltaf, sama hvað svartur gerir ef hvítur leikur samkvæmt lausninni, eða svartur vinnur alltaf eða allar skákir enda með jafntefli).

Rót vandans við að velja forsendur líkana er sú togstreita sem er á milli þess markmiðs annars vegar að hafa forsendurnar sem raunhæfastar - og helst réttar og sannanlegar - og hins vegar þess að hafa líkönin viðráðanleg svo að það sé hægt að fá út úr þeim gagnlegar niðurstöður. Þetta er vel þekktur vandi og á sennilega við um allar greinar vísinda. Milton Friedman komst að þeirri niðurstöðu að það skipti í raun litlu hvort forsendur líkans væru réttar, gagnsemin færi eftir því hve vel niðurstöður þess samsvöruðu raunveruleikanum.<sup>5</sup> Þetta er vitaskuld erfiður biti að kyngja en leikjafræðingar eru þó í góðum félagsskap, aðrar vísindagreinar þurfa líka að sætta sig við að þau líkön sem mest gagn er í byggja oft á forsendum sem eru augljóslega ekki réttar í bókstaflegum skilningi.<sup>6</sup>

#### *Tilraunir í leikjafræði*

Leikjafræðingar gera stundum tilraunir til að athuga hvernig leikir eru leiknir.<sup>7</sup> Ein tilraun sem endurtekin hefur verið margoft með ýmsum afbrigðum byggist á eftirfarandi leik:

Þátttakendur eru hér tveir, við getum kallað þá Ara og Björn. Punktarnir í mynd 1 tákna að taka þarf ákvörðun og nafnið sem stendur við hvern punkt sýnir hvor leikmaðurinn tekur ákvörðunina. Hringirnir tákna að leikurinn hefur endað og tölurnar sem standa við hringina tákna hve mikið hvor leikmaður hefur upp úr kraftinu ef leikurinn endar þar. Fyrri talan tákna hve mikið Ari fær og sú síðari hve mikið Björn fær. Ari hefur leikinn lengst til vinstri í myndinni, hann getur annað hvort valið að enda leikinn og fengið greitt 1 (og Björn fengið ekkert greitt) eða haldið leiknum áfram með því að leyfa Birni að leika. Fáir Björn að leika hefur hann val milli þess að enda leikinn og fá 30 (og Ari ekkert) eða

5. Friedman, 1953.
6. Strangt til tekið eru öll líkön röng því að þau eru ekki nákvæmlega eins og fyrirmyndir þeirra.
7. Hagfræðingar eiga þess sjaldan kost að sannreyna kenningar sínar með tilraunum. Aðferðafræði leikjafræði er því íðulega nokkuð frábrugðin þeirri sem hagfræðingar sem styðjast ekki við leikjafræði beita. Tilraunir í leikjafræði minna oft meira á tilraunir í sálfræði en starf hagfræðinga. Sjá nánar Roth (1991).



verið árangursríkar fyrir skynsamlegt fólk ef sá sem er hótad er ekki fullviss um að sá sem hótar sé skynsamur.<sup>10</sup>

Við tilraunir er iðulega vandi að ákvarða hvernig á að umbuna þátttakendum og þar með ákvarða að hverju þeir keppa. Í leikjum eins og skák eða myllu og raunar flestu því sem telst leikir í venjulegum skilningi er þetta einfalt: Menn stefna einfaldlega að sigri og það er vel skilgreint hvað felst í sigri. Þegar komið er út fyrir venjulega leiki flækist málið, það er ekkert sem samsvarar sigri í leik. Í hagfræði er oft miðað við að fyrirtæki reyni að hámarka hagnað, en það virðist ekki vera góð forsenda að gera ráð fyrir að einstaklingar reyni einfaldlega að hámarka ávinning mældan í krónum. Í fræðilegum líkönum er hægt að komast hjá þessu með því að segja einfaldlega að einstaklingar reyni að hámarka *notagildi* en það er fremur vandræðalegt hugtak, ómælanlegt, óáþreifanlegt og nær óskiljanlegt öðrum en hagfræðingum.<sup>11</sup> Í raun mætti allt eins tala um ánægju, lífsfyllingu eða eitthvað á móta. Þegar kemur að því að skoða hinn raunverulega heim eða gera tilraunir kemur þetta hugtak ekki að miklum notum og því er iðulega notast við peninga. Það eru þó að minnsta kosti tveir gallar á því, í fyrsta lagi snýst lífið um fleira en peninga og í öðru lagi er erfitt að fá nógu mikla peninga til þess að verja í slíkar rannsóknir.

Einn leikur sem hefur verið skoðaður gengur út á að einstaklingur ákveður hvernig skipta á peningaupphæð á milli sín og annars manns. Sá sem leggur til skiptinguna fær einungis að koma með eina uppástungu. Hinn aðilinn getur einungis hafnað skiptingunni eða samþykkt hana. Sé tillagan samþykkt er upphæðinni skipt sam-

kvæmt henni en sé hún felld fær hvorugur neitt. Sé verið að skipta t.d. 1000 krónum (og til einföldunar gerum við ráð fyrir að ekki sé hægt að skipta krónu í smærri hluta) þá ætti lausn leikjafræðinnar að vera að stungið er upp á skiptingunni (999,1) þ.e. sá sem á uppástunguna fær 999 krónur en hinn eina. Ef báðir hugsa einungis um að hámarka sinn hag mældan í krónum ætti þetta að verða niðurstaðan, sá sem einungis getur samþykkt eða hafnað uppástungunni stendur frammi fyrir vali á milli einnar krónu og engrar og þá er ein króna vitaskuld betri en engin. Raunin er sú að þegar þessi leikur er leikinn þá stinga afar fáir upp á þessari skiptingu eða annarri „ósanngjarnri“ og ef það er gert þá er þeim yfirleitt hafnað. Flestir stinga upp á skiptingu sem er mun nær (500,500) og raunar eru helmingaskipti algengasta uppástungan. Vandinn er greinilega sá að fleira skiptir máli en peningar, tilfinningar þátttakendanna skipta höfuðmáli. Það er meira en einnar krónu virði að láta ekki „niðurlægja/féflatta sig“. Hætt er við að fleiri hugsuðu sig um tvisvar ef verið væri að skipta milljarði króna og þeim væri boðin skiptingin 999 milljónir króna handa einhverjum öðrum og milljón handa þeim, þ.e. hætt er við að margir myndu þiggja milljón krónur þótt þeim þætti það súrt í broti frekar en að afþakka boðið, halda fullri reisn og missa af milljóninni.<sup>12</sup>

#### *Fræði verða til*

Það er erfitt að tiltaka hvenær leikjafræði varð til sem fræðigrein. Leikir hafa fylgt mannkyninu frá alda öðli og ómögulegt að tiltaka með vissu hvenær fyrst var farið að beita skipulegum aðferðum til að greina þá. Hið sama má segja

10. Ef leikmenn vita að þeir eiga eftir að leika sama leikinn (eða aðra leiki) við sömu andstæðinga oftast en einu sinni breytist greining leikjafræðinnar á einstökum leikjum oft verulega. Oft er hægt að útskýra hegðun sem virðist órókrétt í einstökum leik ef tekið er tillit til þess að leikmaður kann að vera að reyna að hafa áhrif á hegðun andstæðinga sinna í síðari leikjum.

11. Fullyrðingin um að einstaklingar hámarki notagildi er í raun óhrekjandi - ef notagildi er skilgreint sem *það sem einstaklingar hámarka*.

12. Í fræðilegum líkönum í leikjafræði er eins og áður sagði yfirleitt gert ráð fyrir að hagur leikmanns af ákveðinni útkomu leiks sé mældur í „notagildiseiningum“ og að leikmenn reyni að hámarka notagildi. Þetta þýðir að leikmaður sem er boðin skiptingin (999,1) mun samþykkja hana frekar en að knýja fram skiptinguna (0,0). Hér er í raun gert ráð fyrir að þegar hugsanlegar útkomur eru gefnar upp sé þegar búið að taka tillit til þátta eins og gremju yfir því að fá minna í sinn skerf en aðrir eða ánægju af því að klekkja á leikmanni sem leggur til ójafna skiptingu.

um hagsmunaárekstra og áhuga manna á að greina þá. Ljóst er af mannkynssögunni að menn hafa haft skilning á talsverðu af því sem nú telst til niðurstaðna leikjafræði löngu áður en farið var að beita skipulegum aðferðum greinarinnar til að varpa ljósi á viðfangsefnið. Mörg fræg dæmi eru t.d. um að einhverjir hafi gert sér grein fyrir því að það geti verið þeim í hag að takmarka valkosti sína í framtíðinni. Fleiri en einn stríðsherra hefur brennt brýr eða flota að baki hermönnum sínum til þess að útiloka að þeir hörfuðu fyrir óvininum. Eitt frægasta rit sem samið hefur verið um hernaðartækni, *Stríðslistin* eftir Kínverjann Sun-tzu, var skrifað á fjórðu öld fyrir Krist og mikið af því sem þar kemur fram hefur sennilega þá þegar verið þekkt í Kína í árþúsundir. *Stríðslistin* hefur ekki elst verr en svo að hún sést enn af og til á leslistum í viðskiptanámi.

Fræði sem tengjast átökum stríðsherra eru því ekki ný af nálinni og raunar átti áhugi á notum leikjafræði í hernaði talsverðan þátt í því að fé fékkst til rannsókna í greininni á þessari öld. Í síðari heimsstyrjöldinni komu fram ýmsar nýjungar á sviði leikjafræði, kafbátahernaður Þjóðverja varð til dæmis til þess að skilningur jókst til muna á leikjum sem kenna má við *flotta og eftirför* og eftir stríðið vörðu Sovétmenn miklum tíma í að kanna þá nánar.<sup>13</sup> Einnig var talsvert lagt upp úr að skoða með aðferðum leikjafræði aðra þætti stríðsrekstrar eins og hvernig best væri að stýra sprengjuregni.

Stærsta einstaka skrefið fram á við var stigið 1944 þegar Ungverjinn John von Neumann og Þjóðverjinn Oskar Morgenstern sem báðir höfðu hrakist frá Evrópu til Bandaríkjanna gáfu út rit sitt *Theory of Games and Economic Behavior*. Þetta rit er mikill doðrantur, skrifaður á tyrfnu sérfræðingamáli og styðst mjög við stærðfræði. Það varð því engin metsölubók en olli byltingu í fræðunum. Þótt ritið sé nú sjaldan lesið af öðrum en þeim sem hafa áhuga á sögu vísinda hefur það staðist ótrúlega vel tímans tönn og fátt í því hefur verið hrakið þótt víða hafi vitaskuld verið bætt við þekkingu. Snilli von Neumanns fór ekki

framhá hernaðaryfirvöldum í Bandaríkjunum og hann var fenginn til að skoða ýmis vandamál í stríðsrekstri bandamanna.

Lengi var lögð mikil áhersla á svokallaða *núllsummuleiki* innan leikjafræði en svo nefnast leikir þar sem eins gróði er ætíð annars tap. Bók von Neumann og Morgenstern fjallar til dæmis að langmestu leyti um núllsummuleiki og þegar fjallað er þar um aðra leiki er það gert með því að breyta þeim í núllsummuleiki með því að búa til einn nýjan þáttakanda sem tapar því sem aðrir græða samanlagt eða öfugt. Núllsummuleikir þekkjast utan fræðanna og þeir eru flestir tiltölulega auðskildir sem væntanlega hefur átt mestan þátt í vinsældum þeirra. Hin svokallaða *minmax* (eða *minimax*) -lausn á slíkum leikjum er auðskilin, þegar tveir leika er best fyrir hvorn um sig að velja þann valkost sem lágmarkar mesta hugsanlega ávinning andstæðingsins.<sup>14</sup> Með því að lágmarka ávinning andstæðingsins eru menn auðvitað að hámarka afrakstur sinn ef það sem er til skiptanna er fyrirfram ákveðið.

Vinsældir þessara leikja eru þó mun meiri en þeir verðskulda og raunar hafa þær verið til mestu óþurftar. Ástæða þessa er sú að sé einblínt um of á skiptingu einherrar ákveðinnar köku er hætt við að það falli í skuggann að samningar manna, verkaskipting og viðskipti eru drifkraftur verðmætasköpunar. Ekki næst samkomulag um frjáls viðskipti nema allir sem að því standa telji að hagar sinn batni við það. Kakan stækkar við frjáls viðskipti.

Eftir að rit von Neumann og Morgenstern kom út fóru hjólin að snúast hraðar í leikjafræði. Sex árum síðar, 1950, sendi John Nash, einn fyrrgreindra Nóbelsverðlaunahafa, frá sér tveggja blaðsíðna grein um jafnvægi í leikjum sem hefði dugað til að halda nafni hans á lofti innan leikjafræðinnar um aldur og ævi þótt ekki hefði annað komið til. Hugmynd hans var ofur-einföld, hann skilgreindi það sem jafnvægi í leik þegar sérhver þátttakandi hefði valið þann kost sem færði hann næst því sem hann stefndi að, að því gefnu sem allir aðrir þátttakendur hefðu

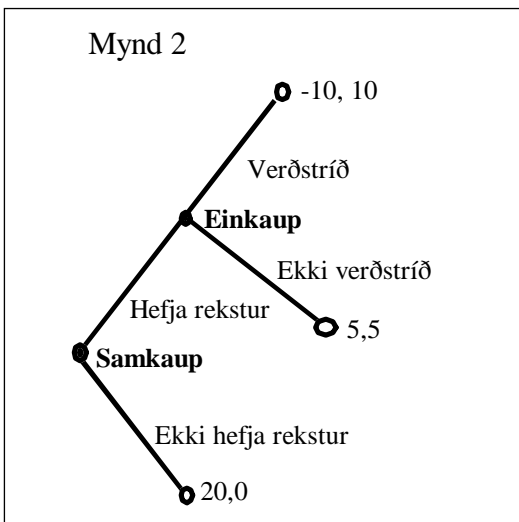
13. Sjá Shubik 1984, kafla 12.5.1.

14. John von Neumann (1928) á heiðurinn af þessari uppgötvun.

valið. Þetta jafnvægi er nú nefnt eftir höfundinum, *Nash-jafnvægi*.

Næsta stóra skref var stigið um miðjan sjöunda áratuginn þegar Þjóðverjinn Reinhard Selten, sem fékk Nóbelsverðlaunin um leið og Nash, fletti hulunni ofan af hótunum sem ekki var líklegt að staðið væri við. Hann sýndi fram á að margt af því sem teldist jafnvægi í skilningi Nash væri óraunhæft því að það byggðist á því að þátttakendur segðust gera eitthvað sem væri ekki í þeirra hag að standa við. Hann benti á að hægt væri í mörgum tilfellum að greina svokallaða *undirleiki* (e. subgame) sem hluta af þeim leik sem verið væri að leika. Eðlilegt væri að gera þá kröfu til lausnar á upprunalega leiknum að hún fæli einnig í sér lausn á þessum undirleikjum.

Einfalt dæmi útskýrir þetta. Kaupmaður í fremur litlum bæ, köllum búið hans Einkaup, situr nú einn að markaðinum en annar kaupmaður íhugar að setja upp verslun í samkeppni við hann, köllum hana Samkaup. Hefji Samkaup rekstur hefur Einkaup tvo kosti, að fara í verðstríð eða fara ekki í verðstríð. Hefji Einkaup verðstríð verður tap á báðum verslununum, en geri Einkaup það ekki verður hagnaður af báðum verslununum en þó talsvert minni hjá Einkaupi en þegar verslunin sat ein að markaðinum. Þessu má lýsa með svokölluðu leiktré (eða ákvarðanatré):



Samkvæmt skilningi Nash eru tvö jafnvægi í þessum leik. Það fyrra felur í sér að Einkaup ákveður að fara út í verðstríð og Samkaup hefur ekki rekstur. Síðara jafnvægið felur það í sér að Samkaup hefur rekstur og Einkaup fer ekki út í verðstríð. Í hvorugu tilfellinu getur annar aðilinn bætt hag sinn með því að breyta ákvörðun sinni. Selten benti hins vegar á að það væri ekki trúverðugt að Einkaup færi út í verðstríð. Í raun mætti líta á ákvörðun Einkaupa sem sérstakan leik og það væri ekki lausn á honum að fara út í verðstríð. Því væri eina jafnvægið sem vit væri í það að Samkaup hæfi rekstur og Einkaup færi ekki út í verðstríð.

Við þetta má því bæta að geti Einkaup bundið hendur sínar, þannig að fyrirtækið eigi ekki annars kost en að hefja verðstríð eigi það í samkeppni þá verður það jafnvægi í þessum leik samkvæmt skilgreiningu Selten að Samkaup hefji ekki rekstur. Með þessari uppgötvun sýndu leikjafræðingar loks formlega fram á kosti þess að geta bundið hendur sínar.

#### *Leikir kalda stríðsins*

Sennilega hefur áhugi stríðsherra og almennings á leikjafræði aldrei orðið meiri en á tímum ógnarjafnvægis kaldastríðsáranna. Áhuginn var skiljanlegur því að í raun var allt líf á reikistjörnunni í veði. Sínum hvorum megin við víglínu sátu tvær fylkingar. Báðum var ljóst að hvor um sig hafði nægt afl til að gjöreyða hinn nánast á svipstundu. Hvorug fylkingin hefði þó haft neinn beinan hag af að tortíma hinn því að landvinningar eftir slík átök hefðu ekki verið mikils virði. Í raun var helsta ástæðan til að gera árás sú að það virtist skömminni skárri að sigra en að tapa og ljóst að sá sem yrði síðari til að hefja árás myndi ekki ríða feitum hesti frá viðureigninni. Þetta hefði átt að vera mjög óstöðugt ástand því að ef annar aðilinn hefði minnsta grun um að hinn ætlaði að gera árás hefði sá fyrrnefndi ærna ástæðu til að senda sínar flaugar af stað. Ekki kom þó til þess og má kannski þakka leikjafræði það að einhverju leyti eða ef til vill bara heilbrigðri skynsemi - sé þá einhver ástæða til að greina á milli vísinda og heilbrigðrar skynsemi.

NATÓ			
		Árás	Ekki árás
Varsjárbandalag	Árás	-1000, -1000	0,-1000
	Ekki árás	-1000,0	0,0

Hvor aðilinn um sig lagði mikla áherslu á að fullvissa hinn um að ekki væri hægt að sigra í svona stríði - útkoman yrði aldrei önnur en jafntefli og þá væri greinilega betur heima setið en af stað farið. Tvennt kom til, báðir lögðu ofurkapp á að tryggja að ekki væri hægt að tortíma geryðingarvopnum þeirra í skyndiárás óvinarins, og - sem skiptir ekki minna máli - að fullvissa andstæðinginn um að árás yrði svarað af fullri hörku jafnvel þótt ávinningurinn af því yrði í raun enginn. Kjarnaflaugar á færanlegum skotpöllum í landi, í sprengjuflugvélum sem gátu farið á loft með örfárna mínútna fyrirvara og kafbátum sem nær ómögulegt var að finna tryggðu að það var nær óhugsandi að annar hvor aðilinn gæti komið í veg fyrir að óvinurinn hefði möguleika á að svara árás. Eftir stendur að sannfæra þurfti andstæðinginn um að árás yrði svarað og „dómsdagsvélina“, ein djöfullegasta uppfinning vísindanna, varð til - eða a.m.k. var ýjað að því að hún hefði orðið til.<sup>15</sup> Dómsdagsvélina var útbúnaður sem sagt var að myndi sjálfkrafa svara kjarnorkuárás með kjarnorkuárás og það án þess að mannshöndin kæmi þar nærri. Það myndi því ekki einu sinni duga að þurrka út allan heraflo og stjórnkerfi kjarnorkuveldis með þennan búnað, flaugar þess myndu fara á loft og tortíma árársaðilanum. Á máli leikjafræðinnar væri sagt að aðili með slíkan búnað hefði bundið hendur sínar, hann hefði útilokað þann möguleika að svara ekki kjarnorkuárás í sömu mynt og þar með í raun tryggt sig gegn því að skynsamur andstæðingur réðist á hann.

Það skipti í raun engu máli hvort búnaðurinn var til, það var nóg að hvor aðilinn um sig teldi miklar líkur á að hinn hefði slíkan búnað, þá var

enginn hugsanlegur ávinningur af því að gera árás á hann. Ekki eru öll kurl komin til grafar um vígbúnað kjarnorkuveldanna í kalda stríðinu en þó virðist sem enginn hafi smíðað slíka vél og er það í góðu samræmi við greiningu leikjafræðinnar, það er enginn ávinningur af því að eiga slíka vél en full ástæða til að láta andstæðinginn halda að maður eigi hana.

#### *Leikjafræði og hagfræði*

Áhugi á spurningum sem nú er svarað með leikjafræði fór að hafa áhrif á hagfræði þegar á 19. öld. Hagfræðingar voru tiltölulega fljótir að koma með líkön sem gátu skýrt hvernig viðskipti ganga fyrir sig á mörkuðum þar sem seljendur eru afar margir og smáir, það margir að enginn hefur áhyggjur af viðbrögðum keppinauta við ákvörðunum sínum. Slíkt hefur verið kallað *fullkomin samkeppni*. Einnig varð fljótlegra ljóst hvernig kaupin myndu gerast á eyrinni ef einungis eitt fyrirtæki starfaði á markaði, *einkasali*. Vandinn er að fæstir markaðir falla í annan hvorn flokkinn og raunar álitamál hvort nokkur tilheyrir þeim fyrrnefnda. Á flestum mörkuðum starfa ekki fleiri fyrirtæki en svo að þau hafa áhrif hvert á annað með ákvörðunum sínum og geta búið við að keppinautar bregðist við hverri breytingu.

Til þess að greina slíka markaði þarf því leikjafræði. Fyrstu líkönin voru afar einföld. Frakkinn Antoin Augustin Cournot kom fram með líkan sem kennt er við hann árið 1838.<sup>16</sup> Það var sáraeinfalt, hann gerði ráð fyrir að tvö eða fleiri fyrirtæki kepptu á markaði með því að ákveða hve mikið þau framleiddu. Sérhvert fyrirtæki gerði ráð fyrir að keppinautar þess myndu ekki breyta ákvörðunum sínum um framleitt magn sama hve mikið það framleiddi. Jafnvægi næðist þegar ekkert fyrirtæki gæti aukið hagnað með því að breyta ákvörðun sinni. Það er ef til vill vafasamt að telja þetta líkan sem framlag til leikjafræði, því að ekki er um *gagnvirkar ákvarðanir* að ræða. Þetta var þó fyrsta alvöru-tilraunin til að skýra gang mála á fákeppnis-mörkuðum. Annar Frakki, Joseph Louis

15. Kvikmynd Stanley Kubrick frá 1964, *Dr. Strangelove - or how I learned to stop worrying and love the bomb*, lýsir vel hugmyndum manna um dómsdagsvélina í miðju kalda stríðinu.

16. Sjá Shubik, í Eatwell o.fl. (1987), bls. 117-128.

François Bertrand,<sup>17</sup> gerði tilraun til að betrumbæta líkan Cournot með því að láta fyrirtækin ákvarða verð í stað magns og er það vissulega oftast raunhæfari forsenda, en engu að síður skilar líkan Bertrand yfirleitt óraunhæfari niðurstöðum en líkan Cournot.

Líkan Cournot var því fyrsta skrefið að skilningi á eðli fákeppnismarkaða. Það fór þó ekki að færast fjör í leikinn (eða leikjafræðina) fyrr en fræðimenn fóru að gera ráð fyrir því að stjórnendur fyrirtækja áttuðu sig á því að ákvarðanir þeirra hefðu áhrif á ákvarðanir keppinautanna.

Síðan þessi fyrstu skref voru stigin hefur skilningur manna á samskiptum fyrirtækja og eðli markaða aukist til muna og nú er erfitt að hugsa sér að reyna að skýra gang mála á flestum mörkuðum án þess að grípa beint eða óbeint til leikjafræði. Nám í rekstrarhagfræði á meistara- og doktorsstigi í háskóla byggir nú yfirleitt á leikjafræði að talsverðu leyti.<sup>18</sup> Einnig kemur leikjafræði víða við sögu í námsefni í fyrsta stigs háskólanámi eftir að byrjendanámskeiðum lýkur. Leikjafræði kemur einnig nokkuð við sögu í námsefni meistaranema í viðskiptafræðum en reyndar undir ýmsum nöfnum.<sup>19</sup> Þá hafa þátttakendur í viðskiptalífi sýnt leikjafræði áhuga og út hafa komið og selst ágætlega, t.d. í Bandaríkjunum, allmargar bækur sem fjalla um eða byggja á leikjafræði - raunar iðulega án þess

að minnst á það að þetta eru fræði - og ætlaðar eru stjórnendum fyrirtækja.<sup>20</sup>

Þótt hér hafi verið minnst á fyrirtæki kemur leikjafræði ekki síður að gagni við að skýra hegðun einstaklinga á markaði. Líta má á fyrirtæki sem samning(a) einstaklinganna sem að þeim standa.<sup>21</sup> Því liggur beint við að sé leikjafræði notuð til að skýra hegðun einstaklinga sé hún líka notuð til að skýra hegðun fyrirtækja. Á sama hátt byggir hagkerfið allt á samskiptum fjölda einstaklinga og fyrirtækja og því ætti að liggja beint við að reyna einnig að skýra hegðun heildarstærða hagkerfisins með notkun leikjafræði.

Hagfræðingar hafa lengi leitað að hinum svokölluðu *rekstrarhagfræðistöðum* (e. micro-foundations) þjóðhagfræði. Sú leit hefur ekki skilað þeim árangri sem vonast hefur verið eftir þótt vissulega hafi hún skilað mönnum fram á við á einstökum sviðum þjóðhagfræði. Sumir vilja ganga enn lengra og byggja rekstrarhagfræðina á hegðun einstaklinga frekar en ýmist einstaklinga, hópa eða fyrirtækja en það verður vart gert án leikjafræði.<sup>22</sup> Þar með verður leitin að grunnstöðum þjóðhagfræði að hluta leitin að *leikjafræðistöðum* hennar.

#### Aðrar greinar félagsvísinda

Hagfræðingar hafa lagt meiri rækt við leikjafræði en aðrir félagsvísindamenn en þó hefur leikjafræði komið víða við sögu í öðrum greinum félagsvísinda. Líkón leikjafræði má nota til að greina hvernig menn bregðast við ákveðnum aðstæðum, hvernig þeir reyna að ná sínum markmiðum í ljósi þess hvernig þeir meta aðstæður og hvernig samskiptum ákveðinna hópa lyktar. Því ætti ekki að koma á óvart að leikjafræði hefur komið að talsverðu gagni í stjórnmálafræði.<sup>23</sup> Komið hefur í ljós að hægt er

17. Sama rit, bls. 68-9.

18. Sjá t.d. Kreps (1990) eða Mas-Colell, Whinston og Green (1995) en þessar bækur eru algengt kennsluefni í slíku námi.

19. Algengt er að námskeiðin séu kennd við það sem enskumælandi kalla *strategy*. *Strategy* hefur ákveðna merkingu í leikjafræði og hefur verið þýtt sem *leikáætlun* en það er notað í mun víðari merkingu utan leikjafræði.

20. Góð nýleg dæmi um rit sem leikjafræðingar hafa skrifað og eru lesin víða í viðskiptafræðinámi eða af þeim sem vilja nýta sér leikjafræði í viðskiptum eru rit Dixit og Nalebuff frá 1991, *Thinking Strategically*, og rit Brandenburger og Nalebuff frá 1996, *Co-opetition*. Fleiri rit af svipuðum toga hafa náð metsölu svo sem *Getting to Yes* eftir Roger Fisher, William Ury og Bruce Patton (1991) og *The Art and Science of Negotiation* eftir Howard Raiffa (1982). Athyglisvert er að fyrirnefndur Ury er mannfræðingur að mennt, Fisher og Patton eru lögfræðingar og Raiffa er stærðfræðingur.

21. Heiðurinn af þessari uppgötvun á Ronald Coase (1937 (1998)). Coase er fæddur í Englandi en hefur búið mest af starfsævi sinni í Bandaríkjunum. Hann fékk Nóbelsverðlaunin árið 1991.

22. Á ensku hefur verið talað um *nano-foundations* hagfræðinnar. Óhætt mun að fullyrða að leitin að þeim er skammt á veg komin.

23. Sjá t.d. Shubik (1985) og Miller (1997).



að nýta mörg líkön sem gefið hafa góða raun annaðhvort í hagfræði eða stjórnmálafræði í hinni greininni. T.d. er til einfalt líkan sem hægt er að nota bæði til að lýsa staðarvali fyrirtækja eða vali stjórnmálaflokka á stað í hinu pólitíska litrófi, þ.e. til hvaða hópa kjósenda þeir vilja höfða. Líkanið var fyrst sett fram af Harold Hotelling árið 1929 til að lýsa staðarvali tveggja keppinauta á markaði en síðar hefur hugmynd hans verið útfærð á marga vegu.

Ekki er minni vandi að velja grunneiningu þegar leikjafræði er notuð í stjórnmálafræði en þegar hún er notuð í hagfræði. Á til dæmis að líta á stjórnmálaflokk, ákveðna arma flokksins eða einstaka stuðningsmenn sem grunneiningu? Það er að því leyti einfaldara að nota leikjafræði til að skoða fyrirtæki en stjórnmálaflokka að oft er viðunandi einföldun að gera ráð fyrir að fyrirtæki stefni að því að hámarka hagnað en það er mun erfiðara að finna hvert markmið stjórnmálaflokks er. Það er t.d. vart viðunandi að gera ráð fyrir að stjórnmálaflokkar stefni að því að hámarka fjölda atkvæða.

Innan stjórnmálafræði hefur leikjafræði m.a. verið nýtt við að greina áhrif mismunandi kosningareglna. Gengið hefur illa að finna „bestu“ kosningaregluna enda er það væntanlega ómögulegt eins og Kenneth Arrow sýndi fram á (1963). Arrow sýndi, með aðferðum sem flokka má sem leikjafræði, að ekki er hægt að finna neina reglu sem uppfyllir allar þær kröfur sem eðlilegt virðist að gera til slíkrar reglu. Þó hafa ýmsar áhugaverðar verið þróaðar.

Í þremur af fimm forsetakosningum á Íslandi hefur forseti verið kjörinn með minni hluta atkvæða, það hefur alltaf verið niðurstaðan þegar fleiri en tveir hafa verið í kjöri. Þetta er velþekkt vandamál og á við í flestum þeim löndum þar sem einmenningskjördæmi eru við lýði eins og t.d. við þingkosningar í Bretlandi. Ein leið til að tryggja að meiri hluti kjósenda í kjördæmi sætti

sig við þann sem nær kjöri er að hafa fleiri en eina umferð og fella út á milli umferða þá sem fá fæst atkvæði - eins og gerist t.d. í rektorskjöri í H.Í. eða forsetakosningum í Frakklandi. Þetta er ekki gallalaus aðferð, einn gallinn er augljóslega að þetta er dýrt fyrir stjórnvöld og mikið umstang fyrir kjósendur.<sup>24</sup>

Í einmenningskjördæmum eiga litlir flokkar erfitt uppdráttar því að stuðningsmenn þeirra hafa hvata til að kjósa einhvern annan og stærri flokk í staðinn ef þeir telja að atkvæði greitt litla flokkinum eigi enga möguleika á því að ákvarða hver kemst á þing. Þetta þýðir að erfitt verður að velta tveggja flokka kerfi úr sessi eins og sjá má í Bretlandi og Bandaríkjunum. Þetta hefur verið skoðað fram og til baka með tækjum leikjafræði. Í Ástralíu hafa menn tekið í notkun kerfi sem nær flestum kostum margra umferða með einungis einni umferð. Þar raðar hver kjósandi frambjóðendum á atkvæðaseðilinn eftir því hve vel þeir hugnast honum, sá besti í fyrsta sæti, sá næstbesti í annað og svo framvegis. Við talningu er fyrst athugað hvort einhver frambjóðandi hafi fengið meiri hluta atkvæða í fyrsta sæti. Ef svo er nær sá auðvitað kjöri. Annars er sá frambjóðandi sem fékk fæst atkvæði í fyrsta sæti felldur út og athugað hvern stuðningsmenn hans settu í annað sæti og þeir taldir sem stuðningur í fyrsta sæti. Ef einhver hefur nú meiri hluta atkvæða, nær hann kjöri en ella er sá sem nú telst með fæst atkvæði í fyrsta sæti felldur út og þannig koll af kolli.

#### *Upplýsingar og óskir*

Ástralska kosningafyrirkomulagið hefur í för með sér að kjósendur hafa engan hvata til að styðja ekki þann sem þeim þykir bestur, þótt sá hafi lítinn stuðning. Þeir hafa því hvata til að *upplýsa um óskir* sínar rétt og skilmerkilega. Vandinn við að fá fólk til að upplýsa óskir sínar er vel þekktur - og kemur víðar við en ætla mátti, til dæmis í viðskiptum. Ef kaupandi og seljandi ákveðinnar vöru eru að þrátta um verð, þrúttu, er það í hag kaupanda að telja seljanda trú um að varan sé honum lítils virði og hann sé því ekki tilbúinn að greiða mikið fyrir hana. Á sama hátt er það í hag seljanda að telja kaupanda

24. Erfitt er að útskýra með rökum hagfræði einum saman hvers vegna menn kjósa, ábatinn af því er í langflestum tilfellum enginn því að líkurnar á því að atkvæðið sem ákveðinn einstaklingur greiðir hafi áhrif á það hver kemst á þing eru afar litlar.

trú um að varan sé honum mikils virði. Þeir hafa því hvorugur hvata til að upplýsa um óskir sínar. Útkoman getur hæglega orðið sú að ekkert verður af kaupnum þótt varan sé minna virði fyrir seljanda en kaupanda.

Vandinn við að fá kaupendur til að upplýsa hve mikið þeir eru tilbúnir að borga verður vart skýrari en við uppboð og leikjafræðingar hafa varið miklum tíma til að greina þau. Kanadamaðurinn William Vickrey, einn Nóbelsverðlaunahafanna sem áður var nefndur, lagði einna mest af mörkum á því sviði. Ein tegund uppboðs hefur fyrir vikið verið kennd við hann, *Vickrey-uppboð*. Vickrey skoðaði m.a. algenga tegund uppboða sem fer þannig fram að sérhver kaupandi leggur fram eitt tilboð án þess að vita hvað aðrir bjóða (eða jafnvel hverjir keppa við hann) og fær sá hlutinn sem hæst býður. Þetta virðist sanngjarnt og eðlilegt fyrirkomulag en gallinn er sá að væntanlegir kaupendur hafa ekki hvata til að gefa upp hve mikils virði hluturinn er þeim. Í staðinn reyna þeir að hámarka tvennt, annars vegar líkurnar á því að fá hlutinn, þ.e. eiga hæsta tilboðið, og hins vegar hagnað þeirra fái þeir hlutinn, þ.e. reyna að lágmarka upphæðina sem þeir þurfa að greiða. Tilboðið sem hver gerir fer því m.a. eftir því hvað hann álitur að aðrir komi til með að bjóða. Þetta er tilvalið vandamál til að greina með leikjafræði - og vandamál er réttnefni því að útkoman getur hæglega orðið sú að sá sem fær hlutinn er ekki sá sem hefur mest not fyrir hann og hefði því verið tilbúinn að greiða mest. Það er augljós soun því að í slíkum tilfellum er svigrúm til að bæta hag bæði þess sem nýtur hlutarins mest og þess sem á hæsta tilboðið. Vickrey sá að með því að breyta leikreglunum var hægt að leysa vandann. Hann lagði til að eftir sem áður fái sá hlutinn sem býður hæst en greiði einungis það sem sá sem býður næsthæst er reiðubúinn að borga. Séu þetta leikreglurnar hafa allir hvata til að bjóða nákvæmlega jafnmikið og hluturinn er þeim virði, *þeir upplýsa óskir sínar*, og engin hætta er á að hluturinn renni ekki til þess sem hefur mest not af honum. Vickrey sýndi líka fram á að útkoman af slíku uppboði ætti að verða nákvæmlega sú sama og af uppboði þar sem allir kaupendur koma saman

og bjóða hver í kapp við annan þangað til að einn situr eftir með hæsta boð.

#### *Leikjafræði og raunvísindi*

Leikjafræði kemur einnig við sögu í raunvísindum, einna helst í líffræði.<sup>25</sup> Ýmsar kenningar um þróun lífvera styðjast við leikjafræði. Líta má á náttúruval sem leik þar sem þátttakendurnir eru mismunandi gerðir af erfðaeftni, DNA. Leikreglurnar lýsa þáttum eins og hvaða tegund borðar hvað og hvernig tegund með ákveðna eiginleika reidir af við ýmsar aðstæður, t.d. mismunandi veður. Takmarkið fyrir erfðaeftnið er að fjölfaldast. Það erfðaeftni sem gefur af sér eiginleika sem nýtast vel í samkeppni við tegundir með annað erfðaeftni verður ofan á. Ein athyglisverðasta niðurstaðan úr slíkum vangaveltum er að það getur verið ákjósanlegt fyrir dýrategund að vera með eiginleika sem leiða til þess að einstaklingar „fórna sér“ fyrir heildina. Það leiðir augljóslega ekki til þess að þessir ákveðnu einstaklingar lifi af og væri því erfitt að skýra með leikjafræði þar sem einstaklingar eru grunn-einingin, þ.e. einstaklingar taka ákvarðanir sem hámarka eigin hag, en getur komið heim og saman við líkön þar sem erfðaeftnið eða tegundin er grunneiningin, þ.e. ákvarðanir miða að því að hámarka hag heildarinnar. Freistandi er að heimfæra þetta upp á mannkynið og nota til að skýra að ýmsir eiginleikar svo sem fórnfýsi og óeigingirni þrífast ágætlega þótt þeir samrýmist því illa að gera ráð fyrir að einstaklingar hugsi einkum um að hámarka eigin hag.<sup>26</sup>

25. Einn arma leikjafræðinnar nefnist *þróunarleikjafræði* (e. evolutionary game theory). Þau fræði hafa beina skírskotun til líffræði en hafa einnig verið notuð til að útskýra t.d. útbreiðslu ýmissa siðvenja og staðla. Utanaðkomandi kann að þykja sérstakt hve miklu þúðri þróunarleikjafræðingar hafa varið til að reyna að skilja hvers vegna lyklorð á tölvum og ritvélum fylgja hinum svokallaða *qwerty* staðli.

26. Leikjafræðin býður upp á fleiri skýringar á slíkum eiginleikum, einkum þá að flestir eiga samskipti við sömu „andstæðingana“ aftur og aftur. Mun auðveldara er að skýra samvinnu í leikjum sem eru endurteknir en leikjum sem eru einungis leiknir einu sinni. Slík samvinna getur verið tilkomin af eigingjörnum hvötum eingöngu þótt hún virðist í fljótu bragði óeigingjörn.

Þessar vangaveltur líffræðinga flækja enn leitina að ákjósanlegustu grunneiningunni, leikmönnum, í leikjafræði. Í stjórnmálafræði, hagfræði og öðrum greinum félagsvísinda virðist einstaklingurinn vera eðlileg grunneining en í líffræði má leiða rök að því að skoða beri tegundina eða erfðaeðni. En mannkynið er vitaskuld dýrategund og því virðist athugandi að byggja kenningar um hegðun mannsins á því hvað sé líklegt að leiða til þess að ákveðin gen breiðist út.

Hvað sem leitinni að fræðilega réttu grunneiningunni líður er ljóst að stundum verður því ekki komið við að nota hana af tæknilegum ástæðum. Það er einfaldlega ekki fýsilegt að smíða t.d. líkan af heilu hagkerfi með því að herma eftir hegðun tugþúsunda eða jafnvel milljóna mismunandi einstaklinga og öllum hugsanlegum samskiptum þeirra. Það er jafnvel ekki vinnandi vegur að byggja haglíkan á því að líkja eftir hegðun allra starfandi fyrirtækja í ákveðnu hagkerfi, það er í mesta lagi hægt að nota tiltölulega grófar einingar eins og heilar atvinnugreinar sem grunneiningar og í slíkri líkanasmíð er hlutverk leikjafræði lítið. Með miklum einföldunum er þó hægt að nota einstaklinga sem grunneiningar, t.d. með því að gera ráð fyrir að allir einstaklingar séu eins - eða jafnvel að aðeins sé einn einstaklingur í hagkerfinu en slík líkön eru þekkt.

Á sama hátt verður í stjórnmálafræði iðulega að notast við t.d. stjórnmálaflokka sem grunneiningar frekar en einstaklinga vegna þess að það er ekki viðráðanlegt að lýsa öllum einstaklingunum sem starfa innan flokksins eða koma á annan hátt við sögu og líkja eftir öllum samskiptum þeirra.

#### Niðurlag

Í grein þessari hefur víða verið komið við. Tilgangurinn var að kynna leikjafræði fyrir lesandanum, stikla á stóru í sögu greinarinnar og benda á nokkur dæmi um notkun hennar. Vegna þess hve dæmin eru mörg er umfjöllun um mörg þeirra nokkuð snubbótt en áhugasömum er bent á þau rit sem vitnað er til hafi þeir áhuga á að skoða þessi dæmi eða önnur nánar.

Eins og fram kemur getur leikjafræði víða komið að notum og uppgötvanir hennar hafa haft áhrif á ýmsar fræðigreinar. Greinin hefur sennilega haft mest áhrif á hagfræði eins og útlutun Nóbelsverðlaunanna sem sagt var frá í upphafi ber vitni um. Saga leikjafræðinnar er þó ekki óslitin sigurganga frekar en saga annarra fræðigreina, óteljandi vandamál eru óleyst og iðulega hafa fræðin ekki staðið undir væntingum. Fyrir þá sem hafa áhuga á að þróa fræðin nánar er það þó vart ókostur; enn er víða óplægður akur og búast má við að uppgötvanir í leikjafræði muni í framtíðinni varpa skýrara ljósi á mörg viðfangsefni.

#### Heimildaskrá:

- Arrow, Kenneth J. [1963 (2. útg.):] *Social Choice and Individual Values*. Wiley.
- Brandenburger, Adam M., og Barry J. Nalebuff [1996]: *Co-opetition*. Currency/Doubleday.
- Coase, Ronald [1937 (1998)]: „The Nature of the Firm.“ *Economica*, 4, bls. 386-405. Birt í íslenskri þýðingu Þorbergs Þórssonar í *Fjármálatíðindum*, fyrra hefti árið 1998, bls. 67-79.
- Dixit, Avinash K., og Barry J. Nalebuff [1991]: *Thinking Strategically, the Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life*. Norton.
- Eatwell, John, Murray Milgate og Peter Newman (ritstj.) [1987]: *The New Palgrave Game Theory*. McMillan Press.
- Fisher, Roger, William Ury og Bruce Patton [1991 (2. útg.):] *Getting to Yes - Negotiating Agreement Without Giving In*. Penguin.
- Friedman, Milton [1953]: „The Methodology of Positive Economics,“ *Essays in Positive Economics*, University of Chicago Press.
- Fudenberg, Drew, og Jean Tirole [1991]: *Game Theory*. MIT Press.
- Heap, Shaun P. Hargreaves og Varoufakis, Yanis [1995]: *Game Theory, A Critical Introduction*. Routledge.
- Hotelling, Harold [1929]: „Stability in Competition.“ *Economic Journal* 39, bls. 41-57.

- Kreps, David M. [1990]: *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press.
- Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston og Jerry R. Green [1995]: *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- Miller, Gary J. [1997]: „The Impact of Economics on Contemporary Political Science,“ *Journal of Economic Literature*, XXXV, bls. 1173-1204.
- Nash, John [1950]: „Equilibrium Points in N-person Games.“ *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, bls. 48-49.
- Raiffa, Howard [1982]: *The Art and Science of Negotiation*. Belknap/Harvard.
- Roth, Alvin [1991]: „Game theory as part of empirical economics.“ *Economic Journal*, 101, bls. 107-114.
- Selten, Reinhard [1965]: „Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragerträgeit.“ *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 12, bls. 301-324.
- Shubik, Martin [1982]: *Game Theory in the Social Sciences, Concepts and Solutions*. MIT Press.
- Shubik, Martin [1984]: *A Game Theoretic Approach to Political Economy*. MIT Press.
- Sun-tzu [1984]: *The Art of War* (þýðing Ralph D. Sawyer). Barnes & Noble Books.
- Von Neumann, John [1928]: „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.“ *Mathematische Annalen* 100, bls. 295-320.
- Von Neumann, John, og Oskar Morgenstern [1944]: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
- Zermelo, Ernst [1913]: „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf der Theorie des Schachspiels.“ *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics*, 2, bls. 501-504.