Fjármálatíðindi, 48. árgangur fyrra hefti 2001, bls. 50-60

Hagvaxtarlíkan með veiðigeira

Lúðvík Elíasson*
Seðlabanka Íslands

Ágrip: Í þessari ritgerð er kynnt hagvaxtarlíkan þar sem mögulegt er að nýta afurð endurnýjanlegrar auðlindar til framleiðslu neysluvöru og fjármuna. Þá fjármuni sem eru notaðir til að afla auðlindarvörunnar má einnig nota beint í framleiðslugeiranum. Þegar framleiðslugeirinn er línulegur með tilliti til fjármuna í óendanlegum tíma, er jafnvægur vöxtur samrýmanlegur nýtingu auðlindarinnar í jafnstöðulausn. Hreyfifræðin reynast hins vegar flókin, og aðfellu-hreyfifræðin jafngild vaxtarlíkani án auðlindargeirans. Jafnstöðustofn auðlindarinnar er ótvírætt minni en sá stofn sem svarar til hámarksjafnstöðuafla.

Lykilorð: endurnýjanleg náttúruauðlind, innri hagvöxtur, langtímajafnvægi.

JEL: O41, Q22.

1. Inngangur

Töluvert hefur verið fjallað um neikvætt samband hagvaxtar og náttúruauðs, einkum eftir að Sachs og Warner (2000) birtu niðurstöður rannsóknar sinnar.[1] Af skiljanlegum ástæðum hefur þetta efni hlotið mikla umfjöllun hér á landi.[2] Er þar jafnt um að ræða talnagreiningu á þessu sambandi, sem og útleiðslu fræðilegra líkana sem geta aukið skilning á viðfangsefninu. Hér er leitt út líkan sem leiðir til langtímajafnvægis hagkerfis sem vex án þess að auðlindargeirinn hverfi.

Við greiningu á sambandi hagvaxtar og auðlindanýtingar er mikilvægt að fella auðlindargeirann á skynsamlegan hátt inn í hagvaxtarlíkan. Sachs og Warner (2000) leiða út, í viðauka, jafnvægishagvöxt í líkani án auðlindargeira, og bæta síðan við útflutningi og athuga hver áhrif það hefur á jafnvægið. Ekki er tekið tillit til þess að auðlindin verður aðeins nýtt ef notuð eru til þess aðföng, svo sem fjármunir eða vinnuafl, sem að öðrum kosti mætti nota í annarri framleiðslu. Ekki er heldur gert ráð fyrir neinni ákvarðanatöku um hvernig auðlindin er nýtt. Hún er aðeins stöðug uppspretta gjaldeyristekna fyrir hagkerfið.

Solow (1999) fjallar um náttúruauðlindir í nýklassísku hagvaxtarlíkani. Hann lítur á auðlindarvöruna sem aðföng í framleiðslu, þar sem hún er notuð við hlið fjármuna og vinnuafls. Niðurstaða hans er sú að endurnýjanlegar náttúruauðlindir, svo sem fisk og skóg, megi taka inn í hagvaxtarlíkön án vandkvæða. Eina breytingin sem þörf er á er að ytri tækniframfarir þurfa að eiga sér stað á meiri hraða en nauðsynlegur er ef auðlindarvörunnar er ekki þörf við framleiðslu. Hann telur hins vegar ekki gagnlegt að nota óendurnýjanlegar náttúruauðlindir í hagvaxtarlíkönum á þennan hátt, því að til þess þurfi að gera svo strangar kröfur um ytri tækniframfarir, að líkönin glati öllum trúverðugleika. Hin endurnýjanlega náttúruauðlind í líkani Solows deilir þeim eiginleika með auðlindinni í

---

* Seðlabanki Íslands, Kalkofnsvegur 1, 150 Reykjavík. Tölvupóstfang:ludvik.eliasson@sedlabanki.is.
Höfundur þakkar Jóni Steinssyni og ritrýnum gagnlegar ábendingar.

1. Rannsóknin kom út sem NBER Working Paper árið 1995.

2. Sjá til dæmis Þórólf Matthíasson (1997), Tryggva Þór Herbertsson (1999), og Þorvald Gylfason, Tryggva Þór Herbertsson og Gylfa Zoëga (1999).

líkani Sachs og Warners, að hún er uppspretta endalauss streymis afurðar í föstu magni, sem er tekið sem gefið í líkaninu, og kemur að kostnaðarlausu. Auðlindarnýtingin krefst því hvorki fjármuna né vinnuafls.

Tryggvi Þór Herbertsson (1999) leysir hagvaxtarlíkan þar sem gert er ráð fyrir að fjármunum sé skipt milli auðlindargeira og framleiðslugeira í föstu hlutfalli, og að auðlindarnýtingin sé í jafnvægi við frjálsan og óheftan aðgang að endurnýjanlegri náttúruauðlind. Hann sýnir að, að þessum forsendum gefnum, getur ekki verið um hagvöxt að ræða í langtímajafnvægi. Aghion og Howitt (1998) fá sömu niðurstöðu í innri-hagvaxtarlíkani, þar sem gert er ráð fyrir að endanlegri framleiðslu sé lýst með AK-tækni. Þeir leggja til annað líkan, þar sem gert er ráð fyrir að hluti vinnuaflsins starfi við framleiðslu millivöru, sem hefur þann eiginleika að gæði hennar batna með tímanum. Þessi forsenda nægir að þeirra sögn til þess að leyfa viðvarandi hagvöxt við fasta og jákvæða jafnvægisstærð auðlindarinnar. Í framsetningu Aghions og Howitts er auðlindarstofninn náttúrugæði, en þeir halda því fram að allt eins megi túlka hann sem fisk eða skóg. Niðurstöður þeirra byggjast hins vegar á framleiðslufalli auðlindarvörunnar sem samrýmist ekki þeim föllum sem notuð eru til að nálga skógarhögg eða fiskveiðar.

Annað líkan, þar sem nýting á endurnýjanlegri auðlind samrýmist viðvarandi hagvexti í langtímajafnvægi, er að finna hjá Bovenberg og Smulders (1996). Auðlindarstofninn nær jafnvægisstærð sem stjórnast af flæði mengunar, en tilvist auðlindarinnar er tryggð með því að gera ráð fyrir því að hún hafi jákvæð áhrif á vaxtarmöguleika hagkerfisins, vinni gegn áhrifum mengunar, bæti velferð og auki afköst í framleiðslu, auk þess að vera einn af framleiðsluþáttunum. Auðlindin í líkaninu er kölluð „náttúrulegt umhverfi“, en erfitt er að fara fram á að hefðbundin endurnýjanleg auðlind, svo sem fiskur eða skógur, hafi alla þá eiginleika sem krafist er af þessari auðlind, og eru nauðsynlegir til að knýja fram tilvist hennar í jafnvægislausn líkansins.

Hér verður endurnýjanlegri náttúruauðlind bætt við hagvaxtarlíkan á einfaldan hátt, og því svarað hvaða forsendur þurfi til að fá fram langtímajafnvægi, þar sem auðlindargeirinn er nýttur, og hagvöxtur er jákvæður. Sú krafa er gerð til líkansins að framsetning auðlindargeirans sé í samræmi við það sem þekkist innan náttúruauðlindahagfræði. Að öllu leyti er reynt að hafa líkanið eins einfalt og mögulegt er að uppfylltum þeim skilyrðum að (1) hámarksstærð auðlindarstofnsins sé takmörkuð, (2) eiginvöxtur auðlindarinnar sé háður stofnstærð, (3) hagvöxtur sé mögulegur án auðlindarinnar og að (4) nauðsynlegt sé að skipta aðföngum milli auðlindargeirans og vaxtargeirans.

Í öðrum kafla er fjallað um hagkvæmustu nýtingu fiskistofns, þar sem aðeins er tekið tillit til veiðigeirans, og hún borin saman við þá nýtingu sem hlýst af frjálsum aðgangi. Í þriðja kafla er sett fram tveggja geira líkan, þar sem auðlindarafurðin er notuð, ásamt fjármunum, við framleiðslu á neyslu- og fjárfestingarvöru. Lausn hámörkunarvandans úr þriðja kafla, sem samrýmist jafnvægum vexti (e. balanced growth) framleiðslugeirans og jafnstöðu (e. steady state) veiðigeirans er skilgreind í fjórða kafla. Í lokakaflanum er svo að finna niðurstöður og túlkun á líkaninu.

2. Hagkvæmasta nýting auðlindar

Þegar náttúruauðlindir eru notaðar í hagvaxtarlíkönum er algengast að þeim sé bætt inn í framleiðslufall sem einum aðfanganna. Endurnýjanlegar auðlindir eru til dæmis meðhöndlaðar ýmist sem stöðugt flæði, þar sem um er að ræða mesta jafnvægisafla, eða einhverja aðra stærð sem leyst hefur verið utan hagvaxtarlíkansins og er einfaldlega tekin sem gefin (Solow (1999), Sachs og Warner (2000)), eða að aflamagn er ákvarðað án notkunar annarra aðfanga (Tahvonen og Kuuluvainen (1991), Li og Löfgren (2000)).

Hér á eftir er kynnt tveggja geira líkan, þar sem annar er auðlindargeiri en hinn framleiðslugeiri sem samræmist jafnvægum vexti, þar sem fjármunasöfnun og framleiðsla vaxa með sama fasta hraðanum í jafnvægi.[3] Fyrst er litið á jafnvægi auðlindargeirans í hlutagreiningu. Í auðlindargeiranum er framleidd vara X sem við getum kallað fisk. Framleiðslufallið er

$$(1)\quad X = BK_X^{\beta} S,$$

þar sem B er fasti, K_X eru fjármunir sem notaðir eru í auðlindargeiranum, S er stærð auðlindarstofnsins (fiskistofnsins), og $0 < \beta < 1$.[4] Stærð fiskistofnsins þróast eins og lýst er með fallinu[5]

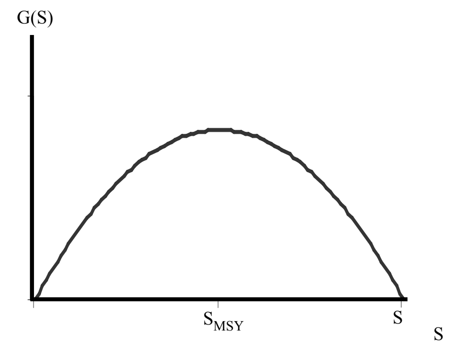
$$(2)\quad \dot{S} = G(S) - X,$$

þar sem fallið $G(S)$ lýsir vexti stofnsins, ef ekki er veitt. Einfalt fall sem oft er notað til að nálga vaxtarfall fiskistofna er

$$(3)\quad G(S) = rS\left(1 - \frac{S}{\bar{S}}\right),$$

þar sem r er eiginn vaxtarhraði stofnsins og $\bar{S}$ er jafnvægisstofnstærð ef ekki er veitt. Ef stofninn er yfir $\bar{S}$ er $G(S) < 0$ og stofninn minnkar, en ef hann er minni en $\bar{S}$ er $G(S) > 0$ og hann því vaxandi. Þessu sambandi er lýst á mynd 1. Vaxtarfall stofnsins (jafna (3), mynd 1) er einfalt, og tekur ekkert tillit til annarra þátta en stofnstærðarinnar sem gætu haft áhrif á vöxt stofnsins. Búast má við að til dæmis sjávarhiti og fæðumagn hafi þar áhrif, en það kemur ekki fram í þessu einfalda falli. Þetta samband vaxtar og stofnstærðar er því einungis sennilegt að jafnaði til lengri tíma. Vaxtarfallið hefur þann eiginleika að vöxtur stofnsins vex með stærð upp að vissu marki, en eftir það dregur úr vexti ef stofnstærðin eykst enn frekar, þar til að hámarksjafnvægisstærð er náð.

Mynd 1. Umhverfður veldisvísisferill (e. logistic curve). Vöxtur fiskistofns, sem ekki er veitt úr, sem fall af stofnstærð



Í jafnvægi er afli jafn vexti stofnsins, það er $X = G(S)$. Mesti jafnvægisafli næst því þar sem vaxtarkúrfan nær hámarki. Sú stofnstærð sem samsvarar mesta jafnvægisafla er merkt S_{MSY} á mynd 1. Hagkvæmasti jafnvægisafli kann hins vegar að vera frábrugðinn hámarksafla, því að einnig þarf að taka tillit til kostnaðar, afvöxtunarþáttar og tilvistargildis (e. existence value), svo að dæmi séu tekin.

Ef gengið er út frá því að hagnaður sé hámarkaður í veiðigeiranum, afurðarverðið sé fast og gert ráð fyrir föstum jaðarkostnaði við fjármunanotkun (í stað þess að tekið sé tillit til þess að þá fjármuni sem notaðir eru mætti að öðrum kosti nýta í framleiðslugeiranum), gildir eftirfarandi: Hagkvæmasta stofnstærð er fundin þar sem ávinningur af því að veiða einn fisk enn er jafn og ávinningurinn af því að skilja hann eftir í sjónum og leyfa honum að vaxa. Ef við horfum fram hjá því að afli er háður stofnstærð, er ávinningurinn af því að skilja fiskinn eftir jafn viðbótarvextinum sem hann veldur, það er G'. Ávinningurinn af því að veiða hann og selja nú fremur en síðar er jafn afvöxtunarþættinum ρ. Ef aflinn væri óháður stofnstærðinni ákvarðaðist hún því við hagkvæmustu nýtingu þar sem halli

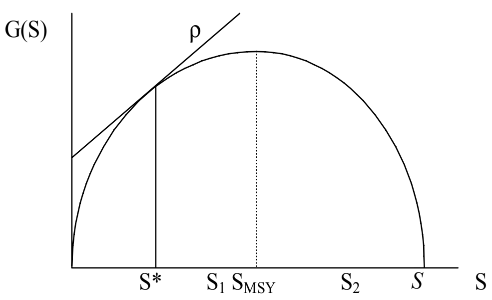
3. Það hugtak sem hér er átt við með jafnvægum vexti er nánar skilgreint í viðauka C.

4. Sjá umfjöllun um svipuð aflaföll hjá, til dæmis, Conrad og Clark (1987, bls. 67) og Rögnvaldi Hannessyni (1993, bls. 7). Ef stofninn kemur inn í aflafallið (1) með veldisvísi S^{α}, $0 \leq \alpha < 1$, verða niðurstöður hliðstæðar við það sem hér fæst. Ef $\alpha < 1$ verður hins vegar ógerningur að leiða út jafnstöðustofninn (jöfnu (17)) nema í undantekningartilfellum. Ef $\alpha = 0$, er vaxtarhraða skuggavirðis auðlindarinnar alltaf lýst með hægri hlið jöfnu (B9). Lúðvík Elíasson (2001) leysir svipað líkan þar sem notast er við aflafallið $X = BL^{1-\beta}$.

5. Punktur yfir breytu táknar tímaafleiðu.

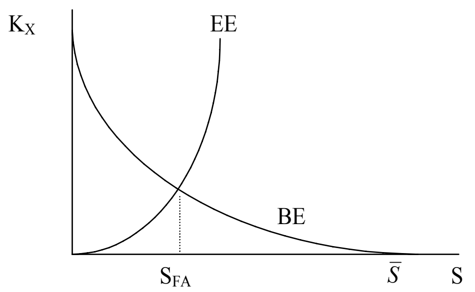
vaxtarferilsins væri jafn afvöxtunarþættinum (mynd 2), og hagkvæmasta stærð stofnsins væri því minni en sú sem gefur af sér hámarksafla. En þar sem aukin stofnstærð leiðir til minni kostnaðar við veiðar, þar sem minna þarf af fjármunum til að ná sama afla, er aukinn ávinningur af því að skilja fiskinn eftir. Það leiðir til þess að hagkvæmasta stofnstærð verður meiri en þar sem halli vaxtarfallsins er ρ. Hagkvæmasta stofnstærð getur því hvort heldur verið minni eða meiri en sú sem gefur af sér hámarksafla (S_1 eða S_2 á mynd 2).

Mynd 2. Hagkvæmasta stofnstærð



Ef aðgangur að auðlindinni er frjáls mun hann aukast svo lengi sem það er hagnaður af fiskveiðum. Hann takmarkast því aðeins að hagnaður verði enginn. Að gefnu aflasambandinu (jöfnu (1)), föstu verði og föstum jaðarkostnaði, ákvarðar þetta skilyrði þá stofnstærð sem samsvarar hagrænu jafnvægi í auðlindargeiranum. Jafnvægi næst því aðeins að sókn, við þessa stærð stofnsins, leiði til afla sem er jafn vexti stofnsins. Þessu er lýst á mynd 3, þar sem upphallandi línan EE sýnir hagrænt jafnvægi undir frjálsum aðgangi, og niðurhallandi línan BE samsvarar lífrænu jafnvægi stofnsins, þar sem afli er jafn vexti.[6]

Mynd 3. Jafnvægi við frjálsan aðgang



Hér er aðeins litið á auðlindargeirann og því um hlutagreiningu að ræða, þar sem sóknin (sem er hér mæld með magni fjármuna í auðlindargeiranum K_X) er meðhöndluð sem innri stærð. Þá fæst sem sagt að við hagkvæmustu nýtingu auðlindarinnar ákvarðast jafnvægisstofnstærð eins og sýnt er á mynd 2, og jafnvægissókn ákvarðast síðan af lífrænu jafnvægi auðlindarinnar ($\dot{S} = 0$ í jöfnu (2)). Við frjálsan aðgang ákvarðast sókn og stofnstærð í jafnvægi eins og sýnt er á mynd 3.

Leiða má út að við frjálsan aðgang er sókn (K_X) meiri, og jafnvægisstofn minni en við hagkvæmustu nýtingu.[7] Þessi greining á við auðlindargeirann í hlutagreiningu, þar sem kostnaður við notkun fjármuna er gefinn, en ekki í almennri jafnvægisgreiningu, þar sem fórnarkostnaðurinn er innri lausn.

6. Lögun þessara ferla er mjög háð fallformunum *X(K,S)* og *G(S)*. Dæmi um jafnvægi við frjálsan aðgang fyrir nokkur önnur fallform er að finna til dæmis hjá Rögnvaldi Hannessyni (1993) og Lúðvík Elíassyni (2001)

7. Hagrænt jafnvægi við hagkvæmustu nýtingu fæst á mynd 3 með því að hliðra EE-ferlinum niður um $(1-\beta)p+\beta\mu > 0$ (þar sem p er afurðarverðið). Þegar $\beta = 1$ verður EE-línan (mynd 3) lóðrétt og ákvarðar jafnvægisstofn við frjálsan aðgang óháð sókninni (sjá til dæmis kafla 2 hjá Rögnvaldi Hannessyni (1993), þar sem notast er við aflafallið $X=BK_XS$).

3. Hagvaxtarlíkan með auðlindarafurð í framleiðslufallinu

Hér er sett fram hagvaxtarlíkan, sem inniheldur sams konar náttúrulega auðlind og fjallað er um að framan. Hinn dæmigerði einstaklingur (e. representative agent) í þessu hagkerfi hámarkar núvirði neyslu sinnar. Hann notar fjármuni K til þess að framleiða endanlega vöru Y sem nota má til neyslu C og fjárfestingar $\dot{K}$. Hagkerfið hefur aðgang að endurnýjanlegri náttúruauðlind S. Hægt er að nota fjármuni til þess að veiða úr henni, og er aflinn X því fall af bæði fjármunum og stærð auðlindarinnar. Aflann má síðan nota í framleiðslugeiranum Y og er jákvæð skiptateygni milli fjármuna og afla. Framleiðslugeirinn er þannig uppbyggður að hægt er að framleiða án þess að nota afla. Jafnframt er jaðarframleiðni fjármuna með jákvætt neðra mark, og framleiðslufall framleiðslugeirans því línulegt í fjármunum (í óendanlegum tíma).[8] Hér er því um einfalt innri-hagvaxtarlíkan að ræða. Tilvist auðlindarinnar í jafnvægislausn er ekki þröngvað upp á líkanið (en það gera bæði Aghion og Howitt (1998, kafla 5) og Bovenberg og Smulders (1996)), því að jafnvægur vaxtarferill er ekki háður því að einhver afli sé fyrir hendi. Lítum nú á jöfnurnar.

Hinn dæmigerði einstaklingur hámarkar nytjafall sitt sem er gefið með fallinu

(4) $\max\limits_{C} \int_0^\infty U(C)e^{-\rho t}dt$

og takmarkast af því að sú framleiðsla sem ekki er neytt er notuð til fjárfestingar, þ.e. uppbyggingar fjármunastofnsins

(5) $\dot{K} = Y - C$.

Einnig gildir að fjármunastofninn er notaður í báðum geirunum

(5a) $K = K_X + K_Y$,

og að auðlindin þróast samkvæmt skilyrðinu

(2) $\dot{S} = G(S) - X$.

U er nytjafallið á hverjum tíma t, C er neysla á tíma t, og ρ er afvöxtunarþátturinn. Varan Y er framleidd með fjármunum K_Y og afla X eins og lýst er með CES-framleiðslufallinu[9]

(6) $Y = (\eta K_Y^\sigma + (1-\eta)X^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}$,

þar sem η og σ eru fastar, $0 \leq \eta \leq 1$ og $\sigma \leq 1$. Fallið hefur fasta stærðarhagkvæmni. Skiptateygnin (e. elasticity of substitution) milli fjármuna og afla er $1/(1 - \sigma)$. Framleiðslufallið (6) er því línulegt þegar σ=1, það er K og X eru fullkomnar skiptivörur í framleiðslu. Þegar σ stefnir á mínus óendanlegt verður hlutfall aðfanga fast, og þegar σ = 0 stefnir fallið á Cobb-Douglas-fallið $Y = K^\eta X^{1-\eta}$. Stikinn η táknar hlutfallslegt vægi aðfanganna, líkt og veldisvísarnir í Cobb-Douglas-falli. Framleiðsla með einungis öðrum hvorum aðfanganna er möguleg ef $\sigma > 0$. Sama gildir ef möguleiki á að vera á viðvarandi hagvexti þegar önnur hvor aðfanganna eru aðeins fáanleg í takmörkuðu magni.[10] Hér verður því gert ráð fyrir því að skiptateygnin sé stærri en 1, það er að segja $\sigma > 0$.

Nytjafallið hefur jafnteygni milli tímabila (e. intertemporal isoelastic)

(7) $U(C) = \gamma^{-1}C^\gamma$,

þar sem γ er tengt skiptateygni milli tímabila, s, þannig að $s = 1/(1 - \gamma)$. Nytjafallið er því jafngilt

8. Sjá umfjöllun um *AK*-framleiðsluföll í t.d. Barro og Sala-i-Martin (1995), Aghion og Howitt (1998). Sjá einnig umfjöllun um aðfellu-línuleg framleiðsluföll í Durlauf og Quah (1999).

9. Notkun aflans sem framleiðsluþáttar er í samræmi við Solow (1999) og Aghion og Howitt (1998, kafla 5). Túlkun á þessari framleiðslu úr fiski er gefin í lokakaflanum hér fyrir neðan. Lúðvík Elíasson (2001) gerir ráð fyrir að aflinn sé seldur úr landi í skiptum fyrir annað hvort fjármagn eða neysluvöru.

10. Beltratti (1992). Sjá einnig Dasgupta og Heal (1974), þar sem þessi niðurstaða fæst fyrir óendurnýjanlega auðlind.

lógariþmanum af neyslu þegar $\gamma = 0$. Nytjafallið (7), framleiðslufallið (6), aflafallið (1) og vaxtarfallið (3) lúta nægilega ströngum skilyrðum til þess að hægt sé að leysa hámörkunarvandamálið (4) með hágildissetningu Pontryagins og leiðir það til eftirfarandi fyrstugráðuskilyrða[11]

$$(8)\ C^{\gamma-1} = \lambda,$$

$$(9)\ \eta^{\frac{1}{\sigma}}(1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = \beta B K_X^{\beta-1} S\left((1-\eta)^{\frac{1}{\sigma}}(1+\Omega^{-1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \mu\right)$$

$$(10)\ \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\eta^{\frac{1}{\sigma}}(1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \rho,$$

$$(11)\ \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \eta^{\frac{1}{\sigma}}(1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\left[1-\Omega\frac{K_Y}{\mu S}\right] - r\left(1-2\frac{S}{\overline{S}}\right) + BK_X^{\beta},$$

þar sem

$$(12)\ \Omega = \Omega(K_X, K_Y, S) \equiv \frac{1-\eta}{\eta}\left(\frac{BK_X^{\beta}S}{K_Y}\right)^{\sigma},$$

og skuggavirði auðlindarinnar μ er mælt í einingum framleiðslugeiravörunnar *Y*. Lausn hámörkunarvandans þarf jafnframt að uppfylla endaskilyrðin $\lim_{t\to\infty} \lambda K e^{-\rho t} = 0$ og $\lim_{t\to\infty} \mu' S e^{-\rho t} = 0$.[12] Þar sem stofnstærðin er takmörkuð, og því jafnvægisaflinn einnig, og σ er jákvætt, stefnir Ω á núll ef fjármunasöfnun í framleiðslugeiranum er óendanleg ($K_Y \to \infty$).

4. Jafnstaða og jafnvægur vöxtur

Sjálfbær afli er takmarkaður. Ef um jafnvægan vaxtarferil í óendanlegum tíma er að ræða, verður því stofninn í jafnstöðu $\widetilde{S}$ þar sem $0 \le \widetilde{S} \le \overline{S}$, það er að segja að veiðigeirinn getur ekki vaxið án takmarka. Hér má reyndar greina á milli þriggja tilfella:

1) $\widetilde{S} = 0$,

2) $\widetilde{S} = \overline{S}$, eða

3) $\widetilde{S} \in\ ]0, \overline{S}[$.

Í fyrsta tilfellinu er fiskistofninn, og þar með veiðigeirinn, horfinn í langtíma jafnvægi. Endaskilyrðið fyrir fiskistofninn er greinilega uppfyllt í þessu tilfelli.

Ef langtíma jafnvægisstærð stofnsins er hin sama og náttúrulega jafnvægisstærðin gildir einnig að veiðigeirinn er horfinn, þar sem vöxtur stofnsins er enginn. Í þessu tilfelli vex skuggavirði stofnsins með hraðanum $\rho + r$ (samkvæmt jöfnum (10) og (11)), sem er ósamrýmanlegt endaskilyrðinu $\lim_{t\to\infty} \mu' S e^{-\rho t} = 0$. Í því felst að svo lengi sem jaðarvirði auðlindarinnar er jákvætt, þarf núvirt virði hennar, við lok þess tímabils sem ákvarðanataka nær yfir, að vera núll. Annars væri verðmætri eign sóað. Aukin aflanotkun hefur jákvæð áhrif á jaðarframleiðni fjármuna í framleiðslugeiranum (vinstri hlið í jöfnu (9)). Ef ekki er veitt, er jaðarframleiðni fjármuna í framleiðslugeiranum $\eta^{1/\sigma} > 0$. Jaðarframleiðni aflans vex hins vegar með fjármunanotkun í framleiðslugeiranum, og stefnir á óendanlegt ef aflinn stefnir á núll. Á móti því vegur að skuggavirði óveidds fisks vex (í þessu tilfelli með hraðanum $\rho + r$), því að kostnaður við veiðar er minni því stærri sem stofninn er (og jaðarframleiðni aflans meiri því lengur sem beðið er með að veiða (hægri hlið jöfnu (9)). Þessi lausn, þar sem veiðum er ávallt frestað, vegna þess að þær koma til með að skila meiru af sér seinna en nú, fær því ekki staðist. Alltaf er hægt að auka núvirt notagildi, samanborið við að slá veiðum alltaf á frest, með því að veiða einhvern tímann í framtíðinni þegar fjármunir skila meiru af sér í gegnum aflann en þeir gera beint í framleiðslunni. Því er útilokað að hagkvæmt sé að leggja niður veiðar að eilífu, nema þá hugsanlega ef stofninn er veiddur upp.

Þriðja tilfellið er áhugaverðast. Þá er stofninn í jafnvægi, og gefur af sér fastan afla $X = G(\widetilde{S})$. Þetta samrýmist endaskilyrðinu ef

$$(13)\ \widetilde{S} < \frac{\overline{S}}{2},$$

11. Hin nauðsynlegu fyrstugráðuskilyrði eru leidd út í viðauka A.

12. Takið eftir að μ' í gangsniðsskilyrðinu er skuggavirði auðlindarinnar, en í jöfnum (9) og (11) hefur það verið umritað í einangar *Y*-vörunnar, þar sem $\mu = \mu'/\lambda$.

eða með öðrum orðum, ef jafnvægisstofninn er minni en sá stofn sem samsvarar hámarksjafnstöðuafla.[13] Það er ekki einfalt að leiða út hvers vegna þetta skilyrði gildir og það verður ekki gert hér. Hins vegar er það ljóst að því meira sem til er af fjármunum (að öðru jöfnu), því ódýrara er að veiða. Einnig er ljóst að ef ekki er um stofnáhrif að ræða í aflafallinu ($X = BK_X^{\beta}$) verður hagkvæmasti stofn minni en ef afvöxtunarþátturinn er jákvæður og kostnaður enginn. Þetta virðist einnig eiga við hér, þótt aflanum sé lýst með jöfnu (1).

Með því að taka tímaafleiðu af hámörkunarskilyrðinu með tilliti til neyslu (jöfnu (8)) fæst að neysla vex með hraðanum

$$(14)\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{C}}{C} = (1-\gamma)^{-1}\left(\eta^{\frac{1}{\sigma}} - \rho\right),$$

á jafnvægum vaxtarferli í óendanlegum tíma þar sem gert er ráð fyrir að afli í auðlindargeiranum sé stöðugur, og fjármunum sé safnað í framleiðslugeiranum.[14] Þá er uppbyggingarhraði fjármunastofnsins gefinn með

$$(15)\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K} = \eta^{\frac{1}{\sigma}} - c,$$

þar sem $c \equiv C/K$. Af skilgreiningunni á jafnvægum vaxtarferli fylgir að c er fast hlutfall á þeim ferli. Ef hlutfallið milli neyslu og fjármuna er fast, er vöxtur fjármuna það líka (15). Þar af leiðir að fjármunir og neysla vaxa með sama hraða á jafnvæga vaxtarferlinum. Samkvæmt (14) og (15) er því

$$(16)\quad \tilde{c} = (1-\gamma)^{-1}\left(\rho - \gamma\eta^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

jafnstöðugildi hlutfallsins milli neyslu og fjármuna í framleiðslugeiranum. Jafnvægishlutfallið er óháð veiðigeiranum, og er því hið sama og fæst ef horft er fram hjá því að veiðar taka fjármuni frá framleiðslugeiranum. Ástæðan er sú að þeir fjármunir sem þarf til veiða eru óverulegir þegar framleiðslugeirinn vex, á meðan veiðin er takmörkuð. Líkanið er því óháð veiðigeiranum í óendanlegum tíma. Jafnstaða veiðigeirans og jafnvægur vöxtur framleiðslugeirans einkennast af skilyrðunum $\dot{S} = \dot{c} = 0$ sem hér hafa verið notuð. Jafnstöðugildi hlutfallsins milli neyslu og fjármuna í framleiðslugeiranum er gefið með jöfnu (16).

Þegar jafnstöðugildi fiskistofnsins hefur innri lausn (tilfelli 3) þá er hámörkunarskilyrðið fyrir skiptingu fjármuna milli geiranna bindandi. Það, ásamt hreyfijöfnu skuggavirðis auðlindarinnar (jöfnu (11)) leiðir af sér að markgildi jafnstöðugildis stofnsins er[15]

$$(17)\quad \tilde{S} = \frac{\bar{S}}{2}\left(1 - \frac{\rho(1-\sigma) - \eta^{\frac{1}{\sigma}}(\gamma-\sigma)}{r(1-\gamma)}\right).$$

Af jöfnu (17) sést að jafnstöðugildi stofnsins er háð afrakstri fjármuna í óendanlegum tíma í framleiðslugeiranum $\eta^{1/\sigma}$. Skilyrðið $\gamma < 0$ er nægjanlegt til að tryggja að $\tilde{S} < \frac{1}{2}\bar{S}$. Einnig gildir að $\tilde{S} > 0$ ef r er nógu stórt, það er ef

$$(18)\quad r > (1-\gamma)^{-1}\left[\rho(1-\sigma) + \eta^{\frac{1}{\sigma}}(\sigma-\gamma)\right].$$

Með öðrum orðum, er jafnstöðugildi fiskistofnsins aðeins til ef eðlislægur vöxtur hans er nægjanlega mikill. Sé slíkt jafnstöðugildi til er það minna en sú stofnstærð sem samsvarar hámarksjafnstöðuafla, eins og áður hefur komið fram.

Tímatengdum eiginleikum hagkerfisins má lýsa með þremur breytum: hlutfalli neyslu og fjármuna c, auðlindarstofninum S, og fjármunanotkun veiðigeirans K_X. Hreyfijafna S er munur vaxtarfallsins og aflans (jafna (2)). Hreyfijafna c

13. Þetta er leitt út í viðauka B. Þar er sannað að innri jafnstöðulausn fyrir stofnstærðina (tilfelli 3) er ekki í mótsögn við aðfelldan jafnvægan vaxtarferil framleiðslugeirans ef skilyrði (13) er uppfyllt. Einn ritrýnir taldi óvarlega notkun á skilyrðinu $\Omega \to 0$ rýra gildi sönnunarinnar. Höfundur telur svo ekki vera, og gætti þess vandlega að ofnota ekki skilyrðið (sbr. jöfnu (B5)). Það er rétt að ítreka að það sem hér hefur verið sannað gildir aðeins á aðfellda ferlinum, þ.e. $t \to \infty$, $K_Y \to \infty$.

14. Jafnvægur vaxtarferill er skilgreindur í viðauka C, og þar eru einnig útleiðslur á jafnvægisgildum hlutfalls neyslu og fjármuna c og auðlindarinnar S.

15. Því er lýst í viðauka C hvernig jafna (17) er fengin.

fæst með því að draga vöxt fjármuna í framleiðslugeiranum frá vexti neyslunnar, og hreyfijafna fjármunanotkunar í veiðigeiranum fæst með því að leysa saman hreyfijöfnur skuggavirðis auðlindarinnar. Þetta eru flóknar jöfnur, en hreyfifræði kerfisins í óendanlegum tíma, sem gildir í grennd við jafnvæga vaxtarferilinn, er eins og auðlindargeirinn sé ekki til.[16] Líkanið er því gagnslaust til að greina áhrif sveiflna í auðlindargeiranum á jafnvægi hagkerfisins, eða leiða út aðlögunarferla hreyfistærðanna.

5. Túlkun og niðurstöður

Afli endurnýjanlegrar náttúruauðlindar var hér notaður sem framleiðsluþáttur í einföldu hagvaxtarlíkani. Ekki er hægt að segja að það sé gert án vandkvæða, nema horft sé framhjá því að afli fæst aðeins með því að nýta fjármuni, sem annars væri unnt að nota í framleiðslugeiranum. Líkanið sem hér var sett fram má túlka sem líkan af hagkerfi sem framleiðir neysluvöru og fjármuni í heimageira, en hefur kost á að veiða úr fiskistofni, og selja aflann erlendis í skiptum fyrir annan framleiðsluþátt sem mögulegt er (en ekki nauðsynlegt) að nota samhliða innlendum fjármunum við framleiðslu heimavörunnar. Líta má á þennan innflutta framleiðsluþátt sem flæði innfluttra fjármuna, eða innflutta auðlindarvöru, svo sem olíu, sem fæst á heimsmarkaði í skiptum fyrir fisk á föstu verði (þar sem einingar hafa verið valdar þannig að verðið er 1). Erfitt er að nota líkanið á hagnýtan hátt vegna þess að ekki er til lausn nema í óendanlegum tíma. Einungis er hægt að greina hreyfifræði þess þegar gert hefur verið ráð fyrir að hlutfall fjármuna í veiðigeiranum stefni á núll. Veiðigeirinn hefur því engin áhrif á hreyfingar umhverfis jafnstöðulausn. Jafnstöðulausnin er því ekki nothæf til greiningar á áhrifum skella á veiðigeirann.

Hér hefur verið sýnt fram á að hagkvæmasta stofnstærð er minni en sá stofn sem gefur af sér hámarks jafnstöðuafla.[17] Sú niðurstaða gildir ekki almennt ef litið er á auðlindargeirann einan og sér og gengið út frá hámörkun hagnaðar. Þá fæst þessi niðurstaða aðeins ef gert er ráð fyrir að afli sé óháður stofnstærð, eða ef afvöxtunarþátturinn er núll.

Líkanið sem hér var leitt út byggist á nýklassískum líkönum, svo sem Solow (1999) og Aghion og Howitt (1998, kafla 5). Hér hefur því verið bætt við að hagkvæmasta nýting auðlindarinnar er leyst samtímis ákvörðun um hagkvæmustu skiptingu á framleiðslu vaxtargeirans milli neyslu og fjárfestingar. Það leiðir svo til þess að taka þarf ákvörðun um hvernig fjármunum er skipt milli geiranna. Meginvandinn sem af þessu hlýst felst í því að fjármunum er deilt milli tveggja geira þar sem annar vex, en hinn er takmarkaður. Við það flækjast lausnir líkansins verulega.[18]

Viðauki A

Nauðsynleg skilyrði fyrir lausn hámörkunarvandans.

Setjum upp Hamiltonvirkjann fyrir hámörkunarvandamálið í kafla 3

(A1)

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\gamma} C^{\gamma} + \lambda \left[(\eta K_Y^{\sigma} + (1-\eta)(B K_X^{\beta} S)^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}} - C \right] + \mu' \left[rS\left(1 - \frac{S}{\bar{S}}\right) - B K_X^{\beta} S \right] + \nu \left[K - K_Y - K_X \right],$$

þar sem aflafallinu (1) hefur verið stungið inn fyrir X í framleiðslufallinu (6) og vaxtarfalli stofnsins (2). μ' er skuggavirði fiskistofnsins.

16. Lúðvík Elíasson (2001) leiðir jöfnurnar út.
17. Hagkvæmasta stofnstærð getur meira að segja verið minni í þessu líkani en sú stofnstærð sem samsvarar frjálsum aðgangi að auðlindinni, en það er háð stikunum í líkaninu.
18. Lúðvík Elíasson (2001) leysir svipað líkan, þar sem vinnuafli, en ekki fjármunum, er deilt milli veiði- og vaxtargeira. Aflinn er fluttur úr landi í skiptum fyrir aðra neysluvöru. Hann notar línulega nálgun á hreyfijöfnum þess líkans í kringum jafnstöðulausn til að greina áhrif sem skellir í auðlindargeiranum hafa á hagkerfið. Ennfremur fjallar hann um notkun skatta og veiðigjalds til að nálga hagkvæmustu lausn í útgáfu líkansins þar sem horfið er frá miðstýringu.

Beitum nú hágildissetningu Pontryagins. Þá fæst að

(A2) $$\frac{\partial H}{\partial C} = C^{\gamma-1} - \lambda,$$

(A3) $$\frac{\partial H}{\partial K_Y} = \lambda \eta^{\frac{1}{\sigma}} (1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \nu \quad ,$$

(A4) $$\frac{\partial H}{\partial K_X} = \beta B K_X^{\beta-1} S \left(\lambda (1-\eta)^{\frac{1}{\sigma}} (1+\Omega^{-1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \mu' \right) - \nu,$$

(A5) $$\dot{\lambda} = -\lambda \eta^{\frac{1}{\sigma}} (1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \rho\lambda,$$

(A6) $$\dot{\mu}' = B K_X^{\beta} \left(\mu' - \lambda (1-\eta)^{\frac{1}{\sigma}} (1+\Omega^{-1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right) - \mu' r \left(1 - 2\frac{S}{\bar{S}} \right) + \rho\mu',$$

(A7) $$\lim_{t\to\infty} \lambda K e^{-\rho t} = 0 \quad ,$$

(A8) $$\lim_{t\to\infty} \mu' S e^{-\rho t} = 0,$$

Þar sem Ω er skilgreint í jöfnu (12). Endaskilyrðin (A7) og (A8) eru hluti hinna nauðsynlegu skilyrða sem þurfa að vera uppfyllt ef um hámörkun er að ræða (sjá til dæmis Chiang (1992, bls. 241-242)). Í tilfelli 3 í kafla 4 er gert ráð fyrir innri lausn, það er $K_X, K_Y > 0$. Jafna (8) fæst með því að setja (A2) = 0, (9) með því að leysa saman (A3) og (A4), (þar sem (A3) = (A4) = 0), (10) er (A5)/λ og (11) er (A6)/μ' -(10).

Viðauki B

Útleiðsla á ójöfnu (13).

Jafna (11) er hreyfijafna skuggavirðis auðlindarinnar. Þar sem stærð auðlindargeirans takmarkast af völdum náttúrunnar (sbr. vaxtarfallið) en fjármunasöfnun á sér stað í framleiðslugeiranum fæst að Ω (skilgreint í jöfnu (12)) stefnir á núll. Ef við gerum ráð fyrir innri lausn í veiðigeiranum verður jafna (9) kennijafna (e. identity). Við getum leyst μ úr þessari jöfnu, og þá fæst að

(B1)
$$\mu = (1-\eta)^{\frac{1}{\sigma}} (1+\Omega^{-1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \eta^{\frac{1}{\sigma}} (\beta B K_X^{\beta-1} S)^{-1} (1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}.$$

Þegar t stefnir á óendaleikann fæst því

(B2) $$\lim_{t\to\infty} \mu = (1-\eta)\eta^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left[\frac{K_Y}{B K_X^{\beta} S} \right]^{1-\sigma}.$$

Þar sem jafna (9) er aljafna má diffra hana með tilliti til tíma, sem gefur

(B3)
$$\dot{\mu} = (1-\sigma)\left[\frac{\dot{K}_Y}{K_Y} - \beta\frac{\dot{K}_X}{K_X} - \frac{\dot{S}}{S}\right](1+\Omega)^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}} \left((1-\eta)^{\frac{1}{\sigma}} \Omega^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \frac{\eta^{\frac{1}{\sigma}}}{\beta B K_X^{\beta-1} S}\Omega \right) + \left[(\beta-1)\frac{\dot{K}_X}{K_X} + \frac{\dot{S}}{S} \right] \frac{\eta^{\frac{1}{\sigma}}}{\beta B K_X^{\beta-1} S} (1+\Omega)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}.$$

Ef við nú látum t stefna á óendanlegt og notum μ úr jöfnu (B2) fæst

(B4) $$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = (1-\sigma)\frac{\dot{K}_Y}{K_Y}.$$

Þar með er fengið að hlutfallið $K_Y^{1-\sigma}/\mu$ stefnir á fasta. Ef við tökum nú markgildi af jöfnu (11) fæst

(B5) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \eta^{\frac{1}{\sigma}} \left[1 - \frac{(1-\eta)(B K_X^{\beta})^{\sigma}}{\eta} \frac{K_Y^{1-\sigma}}{\mu S} \right] - r\left(1 - 2\frac{\tilde{S}}{\bar{S}}\right) + B K_X^{\beta}.$$

(Hér þarf að skrifa út $\Omega K_Y/(\mu S)$ vegna þess að samkvæmt (B4) hverfur þessi liður ekki þótt Ω stefni á núll.) Setjum inn fyrir μ úr (B2). Þá einfaldast þetta í

(B6) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \eta^{\frac{1}{\sigma}} - r\left(1 - 2\frac{\tilde{S}}{\bar{S}}\right).$$

Þar sem vaxtarhraði skuggavirðis fjármuna stefnir á

(B7) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\eta^{\frac{1}{\sigma}} + \rho \ ,$$

sjáum við að vaxtarhraði skuggavirðis auðlindarinnar

(B8) $\dfrac{\dot{\mu}'}{\mu'} = \dfrac{\dot{\mu}}{\mu} + \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}$,

stefnir á

(B9) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\dot{\mu}'}{\mu'} = \rho - r\left(1 - 2\dfrac{\tilde{S}}{\overline{S}}\right)$.

Þetta er minna en ρ ef

(B10) $\tilde{S} < \dfrac{\overline{S}}{2}$,

þ.e. ef jafnvægisstofninn er minni en stofninn sem gefur af sér hámarks jafnstöðuafla, (að gefnu umhverfða veldisvísisvaxtarfallinu). Ef þetta gildir er endaskilyrðið (A8) uppfyllt.

Viðauki C

Útleiðsla á jafnvægum vaxtarferli framleiðslugeirans og jafnstöðulausn veiðigeirans.

Af jöfnu (8) fæst að neysla vex með hraðanum

(C1)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{C}}{C} = \lim_{t\to\infty}(1-\gamma)^{-1}\left[\eta^{\frac{1}{\sigma}}\left(1+\frac{1-\eta}{\eta}\left[\frac{BK_X^{\beta}S}{K_Y}\right]^{\sigma}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \rho\right]$$

$$= (1-\gamma)^{-1}\left(\eta^{\frac{1}{\sigma}} - \rho\right),$$

á jafnvægum vaxtarferli í óendanlegum tíma. Framleiðslufallið í framleiðslugeiranum er línulegt í fjármunum í óendanlegum tíma (samkvæmt skilgreiningu Durlauf og Quah (1999, bls. 257)) í þeim skilningi að

(C2) $\lim\limits_{K\to\infty} K^{-1}(\eta K_Y^{\sigma} + (1-\eta)X^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}} = \eta^{\frac{1}{\sigma}} > 0.$

Hraði fjármunasöfnunar er

(C3)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K} = \lim_{t\to\infty} K^{-1}\left[(\eta K_Y^{\sigma} + (1-\eta)(BK_X^{\beta}S)^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}} - C\right]$$

$$= \eta^{\frac{1}{\sigma}} - c\ ,$$

þar sem $c \equiv C/K$. Ef aðfelldur jafnvægur vaxtarferill er skilgreindur þannig að 1) framleiðsla eykst með föstum hraða, og 2)

(C4) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{\dot{Y}}{Y} - \dfrac{\dot{K}}{K}\right) = 0$,

(Durlauf og Quah (1999, bls. 243)), fylgir að c er fast hlutfall á þeim ferli. Ef hlutfall neyslu og fjármuna er fast, er vöxtur fjármuna það líka. Þar af leiðir að fjármunir og neysla vaxa með sama hraða á jafnvæga vaxtarferlinum í óendanlegum tíma. Samkvæmt (C1) og (C3) er því jafnstöðugildi hlutfalls neyslu og fjármuna í framleiðslugeiranum lýst með jöfnu (16).

Þegar jafnstöðugildi fiskistofnsins hefur innri lausn (tilfelli 3) er jafna (9) aljafna, og tímaafleiðan af henni er gefin með jöfnu (B3) að ofan. Ef jafna (B3) er sett inn fyrir tímaafleiðu skuggavirðis auðlindarinnar í jöfnu (11), er unnt að leysa fyrir jafnstöðugildi stofnsins, með því að taka markgildið þegar tíminn nálgast óendanleikann. Þá fæst jafna (17).

Heimildaskrá

Aghion, P., og P. Howitt (1998). *Endogenous Growth Theory*. Massachusetts: MIT Press.

Beltratti, A., (1992). Endogenous growth with fixed factors of production. Nota di Lavoro 16.92, Fondazione ENI Enrico Mattei.

Bovenberg, A. L., og S. Smulders (1996). Transitional impacts of environmental policy in an endogenous growth model. *International Economic Review*, 37, 861-893.

Chiang, A. C., (1992). *Dynamic Optimization*. New York: McGraw-Hill.

Conrad, J. M., og C. W. Clark (1987). *Natural Resource Economics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dasgupta, P. S., og G. M. Heal (1974). The optimal depletion of exhaustible resources. *Review of Economic Studies, Symposium*, 3-28.

Durlauf, S. N., og D. T. Quah (1999). The new empirics of economic growth. Í J. B. Taylor og M. Woodford (ritstj.), *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1A. Amsterdam: North-Holland.

Li, C.-Z., og K.-G. Löfgren (2000). Renewable resources and economic sustainability: A dynamic analysis with heterogeneous time preferences. *Journal of Environmental Economics and Management*, 40, 236-250.

Lúðvík Elíasson (2001). *Economic Growth with a Renewable Resource Sector*. Doktorsritgerð, University of Washington.

Rögnvaldur Hannesson (1993). *Bioeconomic Analysis of Fisheries*. Halsted Press.

Sachs, J. D., og A. M. Warner (2000). Natural resource abundance and economic growth. Í *Leading Issues in Economic Development*. Oxford: Oxford University Press. Einnig NBER Working Paper 5398 (1995).

Solow, R. M., (1999). Neoclassical growth theory. Í J. B. Taylor og M. Woodford (ritstj.), *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1A. Amsterdam: North-Holland.

Tahvonen, O., og J. Kuuluvainen (1991). Optimal growth with renewable resources and pollution. *European Economic Review*, 35, 650-661.

Tryggvi Þór Herbertsson (1999). *Sources of Economic Growth*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.

Þorvaldur Gylfason, Tryggvi Þór Herbertsson og Gylfi Zoëga (1999). A mixed blessing: Natural resources and economic growth. *Macroeconomic Dynamics*, 3, 204-225.

Þórólfur Matthíasson (1997). Veiðigjald. *Fjármálatíðindi*, 44, 40-51.