Áhættuvöktun - Tölfræðivöktun á vísbendingum um kerfislægar breytingar.

Helgi Tómasson, helgito@hi.is
Hagfræðideild HÍ
Málstofa Seðlabanka Íslands
Reykjavík, 20. desember, 2011.

Skipulag fyrirlestrar

- Sögulegt yfirlit
- Nokkrar útfærslur
- Áróður fyrir líkönum í samfelldum tíma
- Hermanir og dæmi
- Lokaorð

Sögulegt yfirlit/Ýmsar nafngiftir

- Í tölfræðiliterúr (econometríu o.s.frv) gjarnan talað um „structural-break" eða „change-point detection".
- Í stærðfræði (líkindafræði, e.t.v. decision-teoríu) stundum talað um „optimal-stopping". (ath. engin gögn, sbr. amerískar optionir, sectetary-vandamál.)
- Í verkfræði er talað um „optimal-control", „statistical-process-control", „quality-control".
- Í heilbrigðisvísindum er talað um „monitoring".
- Ljóst að margar tölfræðigreinar snertast. Sumir tala um „surveillance"(**Vöktun**)   og „sequential analysis".

a) Finna punktinn retróspektívt. Þ.e. að skoða söguna og álykta um hvernær eitthvað gerðist.

Þetta hefur oft mikið að gera með tímann.

- Most, if not all, economic analysis involve **time series data**

  (The distinction often made between time series and cross-section data does not invalidate this statement, since cross-section data are in fact observations on time series variables pertaining to individual units in a cross section. Overlooking the time series nature of cross-section data can at times lead to serious errors in analysing data.)
  (Zellner, 1971, bls. 186)

b) On-line eftirlit,gera viðvart eins fljótt og auðið er, meta parametra fyrir og eftir. Þ.e. kveikja á aðvörunarljósi og tilkynna að nú hafi eitthvað gerst. Statistical(stochastic)-process-control.

Nokkur tilfelli af sögulegri greiningu

1. Brotpunktur þekktur, þ.e., x^* þekkt í:
$$y_i = \begin{cases} \beta_1 x_i + \varepsilon_i & x_i < x^* \quad \text{(a)} \\ \beta_2 x_i + \varepsilon_i & x \geq x^* \quad \text{(b)} \end{cases}$$
2. Sama nema x^* óþekkt.
3. Blanda af populationum, þ.e. stundum gildir (a), stundum (b).
4. Óþekktir brotpunktar en β_1 breytist hægt í β_2.
5. Engin föst gildi á β_1 og β_2. Parametrar hreyfast eftir random ferli.

Í mörgum hagnýtingum er x^* tímapunktur, þ.e. á ákveðnum tímapunkt er brot í röð, t.d. efnahagshrun.

Margir þekkja CUSUM

$$\sum_{i=1}^{t} \hat{\varepsilon}_i, \quad t = \dots, n,$$

og CUSUMSQ

$$\sum_{i=1}^{t} \hat{\varepsilon}_i^2, \quad t = \dots, n,$$

þar sem $\hat{\varepsilon}$ eru annað hvort rekúrsívir residúalar (spáskekkjur) eða OLS residúalar. ATH! OLS residúalar eru fall af öllu tíambilinu.

Rekúrsívir residúalar eru óháðir (bara fall af fortíðinni) og því CUSUM af þeim lík random-walk.

Einfalt dæmi (2-phasedæmi)

Byggt á Broemeling & Tsurumi (1987).

$$y_i = \begin{cases} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta}_1 + \varepsilon_i & i = 1, \ldots, m, \\ \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta}_2 + \varepsilon_i & i = m+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Þ.e. discrete tími, á óþekktum tímapunkti m breytist samband y_i við skýristærðirnar. Hér er einfaldasta hugsanlega línulega líkan og gert ráð fyrir að ε_i séu óháðar normal.

Vil meta $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2 = V(\varepsilon_i)$ og m. Likelihood-fallið, $L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2, m|\text{gögn})$ er:

$$L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2, m|\text{gögn}) \propto$$
$$\sigma^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}(y_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}_2)^2\right)\right)$$

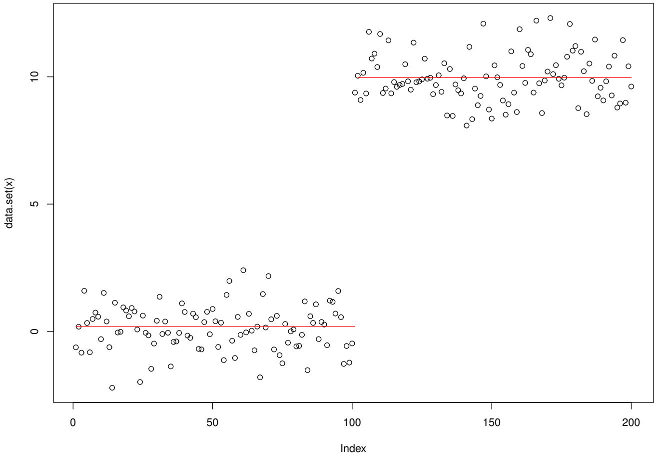
Hér má beita MLE (met $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, σ og m). En hvað ef nota á bayesískar aðferðir hvaða prior er þá auðveldur?

Holbert (1982) og Broemeling & Tsurumi (1987) stinga upp á að nota „non-informative prior"fyrir regression-partinn.

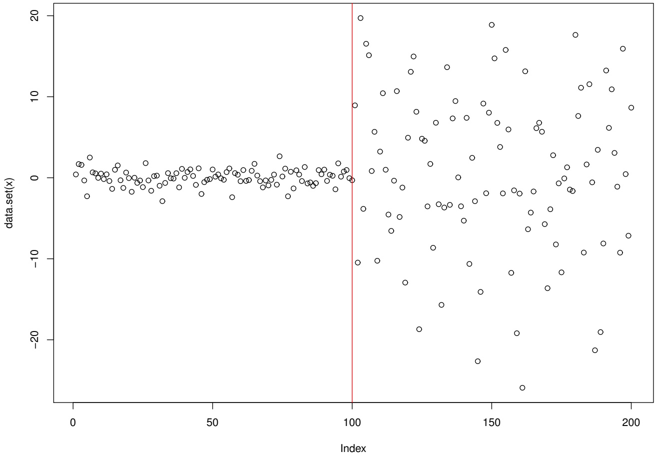
$$\pi(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \propto \text{ constant },$$
$$\pi(\tau) \propto 1/\tau, \qquad \tau = 1/\sigma^2, \quad \tau > 0,$$
$$\pi(m) \propto 1/(n-3), \qquad 2 \leq m \leq n-2.$$

Þannig geta þeir fengið formúlur fyrir a posteriori dreifingu parametranna. A posteriori dreifingin fyrir m er ekkert mjög flókin en a posteriori dreifingin fyrir $\boldsymbol{\beta_1}$ og $\boldsymbol{\beta}_2$ eru flóknar mixtures af t-dreifingum og a posteriori dreifingin fyrir τ er flókin mixture af gamma-dreifingum.
Broemeling & Tsurumi (1987) leiðir út margvíðar útgáfur.

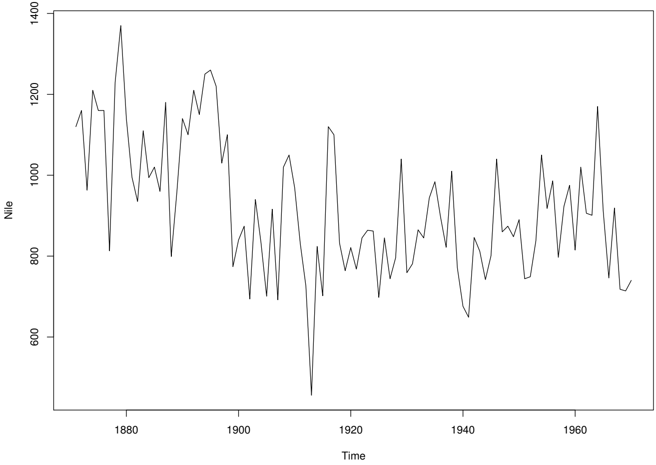
- Þetta verður miklu reiknifrekara ef gera á ráð fyrir mörgum brotpunktum, $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_k)$.
- Barry & Hartigan (1993) stinga upp á nálgun á posterior dreifingu fyrir $\boldsymbol{m}$ þegar gert er ráð fyrir að y_i hafi föst meðaltöl θ_i á milli brotpunktanna m_i.
- Nálgunin byggir á hermunum á *product partition* dreifingu og notast er við *block prior* þéttifall.
- Þetta gerir að verkum að posterior dreifingin fyrir meðaltölin eru ekki föst.



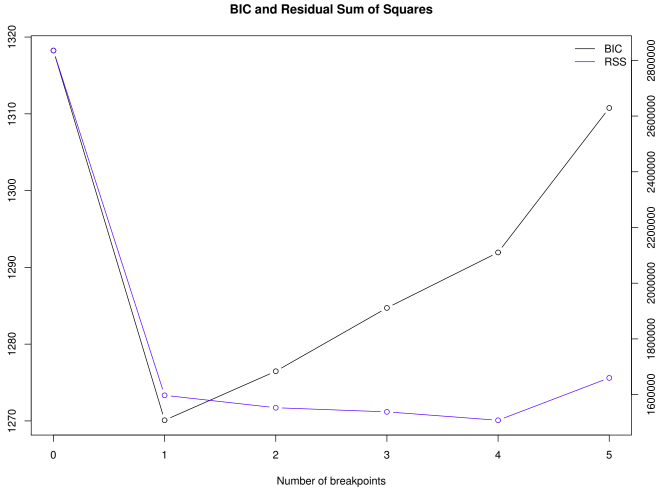
Brot í tíma 100. Hermun í R og mat á brotpunkti með changepoint.



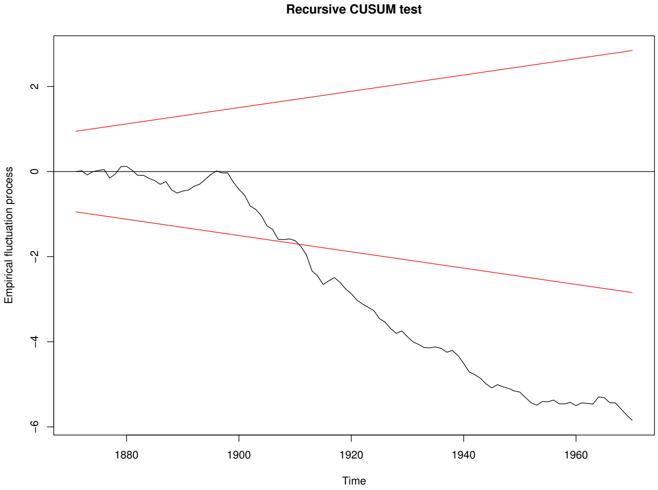
Brot í tíma 100. Hermun í R og mat á brotpunkti með changepoint.



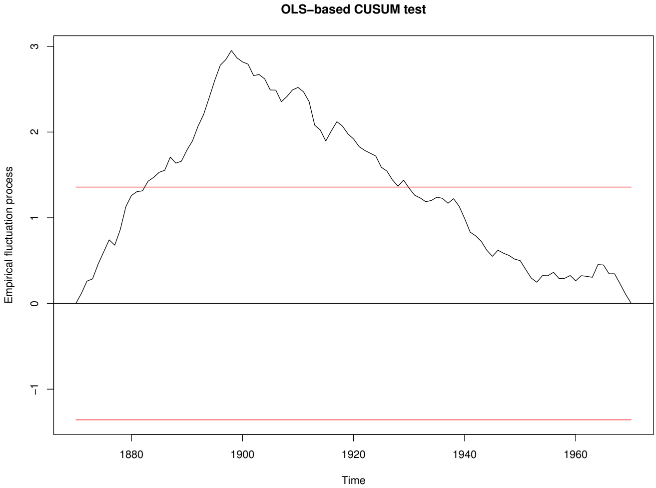
Vatn í Níl



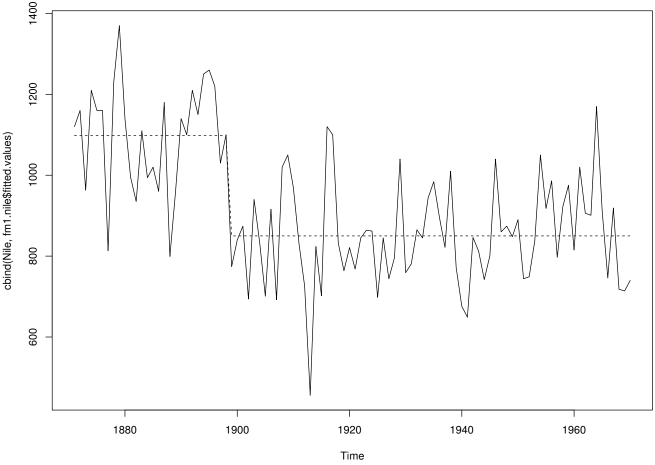
Talning á brotpunktum með AIC/BIC. Reiknað með struchange.



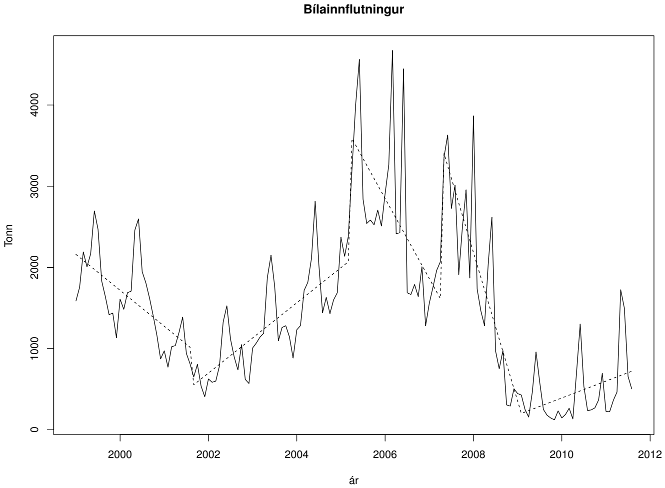
CUSUM með rekúrsívum residúölum



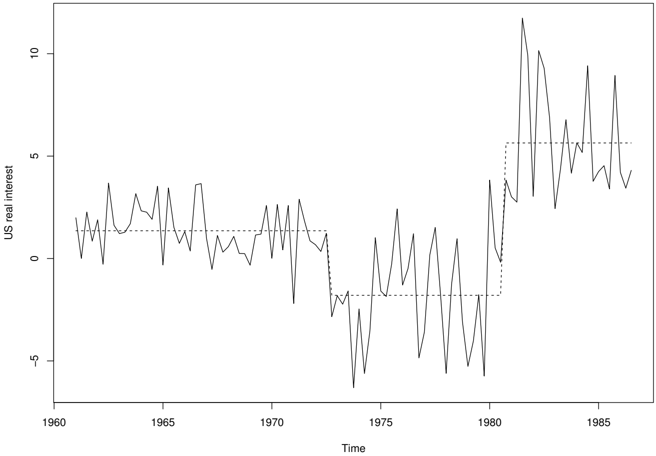
CUSUM með OLS residúölum



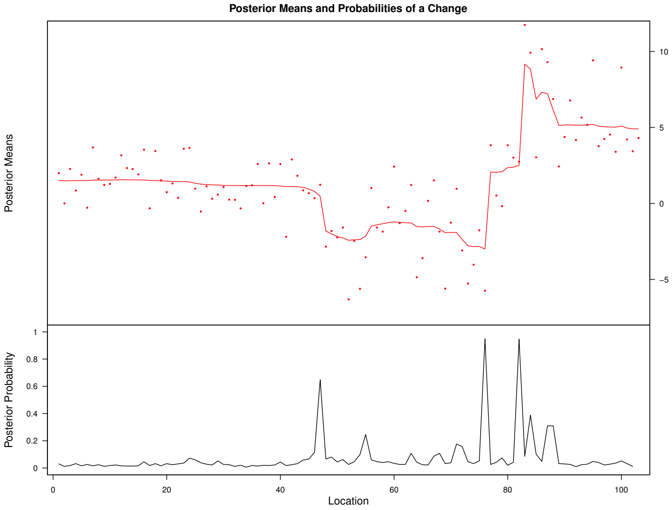
Meðalvatn í Níl.



Brotpunktar í bílainnflutningi.



Raunvaxtaþróun í USD



Bayesísk mat á brotpunktum í raunvöxtum í USD.

On-line mat, hefur eitthvað gerst?

- Surveillance
- Optimal stopping
- Statistcal process control (SPC)
- Page (1954), Page (1955) og Page (1957) er sagt frá nokkrum hugökum eins og ARL (Average-Run-Length).
- Ýmsar optimality niðurstöður hafa verið sannaðar. Discrete/samfelldur tími, o.s.frv.

Tímatengd líkön

	Tími discrete	Tími samfelldur
Ástand samfellt	ARMA, VAR	Black-Scholes
Ástand discrete	Ýmislegt	Duration models

- Input stable (t.d. normal) + línulegt likan = output stable
- Ef ég vil fá skew output úr líkani verð ég annað hvort að velja ólínulegt líkan eða non-normal skew stable dreifingu.

Um líkön fyrir samfelldan tíma

- Gerir ráð fyrir að ferli, $Y(t)$, sé skilgreint í öllum tímapunktum en bara mælt í strjálum tímapunktkum, $t_1, t_2, \ldots$. Við viljum álykta um eðli ferlisins $Y(t)$.
- T.d. hægt að gera ráð fyrir einhvers konar ARMA strúktúr:
$$\begin{aligned} Y^{(p)}(t) + \alpha_1 Y^{(p-1)}(t) + \cdots + \alpha_p Y(t) = \\ d(W^{(0)} + \beta_1 W^{(1)} + \beta_q W^{(q)}). \end{aligned}$$
- Hef samið R-pakka, *ctarma*, sem metur continous-time ARMA.
- Nota normal-likelihood sem líka dugar fyrir stable input.

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)
-
-

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}}$$

-
-

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

-
-

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

- Þessi ritháttur þýðir
-

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

- Þessi ritháttur þýðir

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(X(s), s, \boldsymbol{\theta})ds + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sigma(X(s), s, \boldsymbol{\theta})dW(s)}_{\text{Ito-integral}}$$

-

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

- Þessi ritháttur þýðir

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(X(s), s, \boldsymbol{\theta})ds + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sigma(X(s), s, \boldsymbol{\theta})dW(s)}_{\text{Ito-integral}}$$

- Föllin μ og σ ákvarða eiginleika lausnarferlanna $X(t)$

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

- Þessi ritháttur þýðir

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(X(s), s, \boldsymbol{\theta})ds + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sigma(X(s), s, \boldsymbol{\theta})dW(s)}_{\text{Ito-integral}}$$

- Föllin μ og σ ákvarða eiginleika lausnarferlanna $X(t)$
- Hér læt ég föllin vera parametrísk með parameter $\boldsymbol{\theta}$ sem vektor af tölum (parametrum)

- Skrifum slembnadiffurjöfnu (SDE)

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dt}_{\text{drift}} + \underbrace{\sigma(X(t), t, \boldsymbol{\theta})dW(t)}_{\text{diffusion term}}$$

- Þessi ritháttur þýðir

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(X(s), s, \boldsymbol{\theta})ds + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sigma(X(s), s, \boldsymbol{\theta})dW(s)}_{\text{Ito-integral}}$$

- Föllin μ og σ ákvarða eiginleika lausnarferlanna $X(t)$
- Hér læt ég föllin vera parametrísk með parameter $\boldsymbol{\theta}$ sem vektor af tölum (parametrum)
- Tölfræðilegur vandi snýst um að álykta um μ og σ (gegnum $\boldsymbol{\theta}$) út frá mælingum á $X(t)$.

Nokkrar einfaldar SD

OU $\quad dX(t) = \kappa(\alpha - X(t))dt + \sigma dW(t)$

Ornstein-Uhlenbeck/Vasicek

CIR $\quad dX(t) = \kappa(\alpha - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t)$

Cox-Ingersoll-Ross/square-root process

CKLS $\quad dX(t) = \kappa(\alpha - X(t))dt + \sigma X(t)^{\rho}dW(t)$

Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992)=CKLS. Tilfellin $\rho = 0$, $\rho = 1/2$ og $\rho = 1$ í CKLS eru analýtískt þægileg.

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

-

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,

-

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x,t,\boldsymbol{\theta}) = \mu(x,\boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x,t,\boldsymbol{\theta}) = \sigma(x,\boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

-

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

$$f(x) \propto \frac{1}{\sigma(x)^2} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma(s)^2} ds\right)$$

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

$$f(x) \propto \frac{1}{\sigma(x)^2} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma(s)^2} ds\right)$$

- Fyrir CKLS, $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \alpha, \sigma, \rho)$ þá er

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

$$f(x) \propto \frac{1}{\sigma(x)^2} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma(s)^2} ds\right)$$

- Fyrir CKLS, $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \alpha, \sigma, \rho)$ þá er
- f(x) normal ef $\rho = 0$

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

$$f(x) \propto \frac{1}{\sigma(x)^2} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma(s)^2} ds\right)$$

- Fyrir CKLS, $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \alpha, \sigma, \rho)$ þá er
- f(x) normal ef $\rho = 0$
- f(x) er gamma ef $\rho = 1/2$

Jafnvægis (time-invariant) dreifing

Time-homogen tilfelli,
$\mu(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \mu(x, \boldsymbol{\theta})$ og $\sigma(x, t, \boldsymbol{\theta}) = \sigma(x, \boldsymbol{\theta})$ föllin ekki háð tíma

- Ef $X(t)$ er einvítt þá er auðvelt að finna jafnvægisdreifingu ef hún er til, f, þéttifall jafnvægisdreifingar er:

$$f(x) \propto \frac{1}{\sigma(x)^2} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma(s)^2} ds\right)$$

- Fyrir CKLS, $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \alpha, \sigma, \rho)$ þá er
- f(x) normal ef $\rho = 0$
- f(x) er gamma ef $\rho = 1/2$
- f(x) er inverse-gamma ($1/X$ er gamma) ef $\rho = 1$

- Ef $\rho = 1$ þá er:

- Ef $\rho = 1$ þá er:

$$f(x) \propto \underbrace{x^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2}-2}}_{A} \underbrace{\exp(-\frac{2\kappa\alpha}{\sigma^2 x})}_{B}$$

- Ef $\rho = 1$ þá er:

$$f(x) \propto \underbrace{x^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2}-2}}_{A} \underbrace{\exp(-\frac{2\kappa\alpha}{\sigma^2 x})}_{B}$$

- Fyrir stór x er B hlutinn nálægt 1 og hegðun dreifingar ræðst því af A.

- Ef $\rho = 1$ þá er:

$$f(x) \propto \underbrace{x^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2}-2}}_{A} \underbrace{\exp(-\frac{2\kappa\alpha}{\sigma^2 x})}_{B}$$

- Fyrir stór x er B hlutinn nálægt 1 og hegðun dreifingar ræðst því af A.
- Dreifingin hefur því einskonar Pareto-tail/heavy-tail, þ.e. öfgakennd gildi möguleg

- Ef $\rho = 1$ þá er:

$$f(x) \propto \underbrace{x^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2}-2}}_{A} \underbrace{\exp(-\frac{2\kappa\alpha}{\sigma^2 x})}_{B}$$

- Fyrir stór x er B hlutinn nálægt 1 og hegðun dreifingar ræðst því af A.
- Dreifingin hefur því einskonar Pareto-tail/heavy-tail, þ.e. öfgakennd gildi möguleg
- Ef byrjunargildi er stórt og κ lágt þá verður aðlögun hæg að α.

- Ef $\rho = 1$ þá er:

$$f(x) \propto \underbrace{x^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2}-2}}_{A} \underbrace{\exp(-\frac{2\kappa\alpha}{\sigma^2 x})}_{B}$$

- Fyrir stór x er B hlutinn nálægt 1 og hegðun dreifingar ræðst því af A.
- Dreifingin hefur því einskonar Pareto-tail/heavy-tail, þ.e. öfgakennd gildi möguleg
- Ef byrjunargildi er stórt og κ lágt þá verður aðlögun hæg að α.
- Einungis endanleg mörg móment eru til. T.d. þarf $2\kappa/\sigma^2 > 1$ til að $E(X^2)$ sé endanlegt.

Tölulegur útreikningur sennileikafalls

-

Tölulegur útreikningur sennileikafalls

- Hvað vitum við um þéttifallið $f(x|x_0, \Delta)$?, $x = x(t + \Delta)$, $x_0 = x(t)$

Tölulegur útreikningur sennileikafalls

- Hvað vitum við um þéttifallið $f(x|x_0, \Delta)$?, $x = x(t + \Delta)$, $x_0 = x(t)$
- Þar sem $X(t)$ er diffusion vitum við að $f(x|x_0, \Delta)$ leysir (Kolmogorov-forward-jöfnu)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x|x_0, \Delta)}{\partial \Delta} + \frac{\partial \left(\mu(x, \boldsymbol{\theta}) f(x|x_0, \Delta)\right)}{\partial x} \\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \left(\sigma^2(x, \boldsymbol{\theta}) f(x|x_0, \Delta)\right)}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}
$$

Tölulegur útreikningur sennileikafalls

- Hvað vitum við um þéttifallið $f(x|x_0, \Delta)$?, $x = x(t + \Delta)$, $x_0 = x(t)$
- Þar sem $X(t)$ er diffusion vitum við að $f(x|x_0, \Delta)$ leysir (Kolmogorov-forward-jöfnu)

$$\frac{\partial f(x|x_0, \Delta)}{\partial \Delta} + \frac{\partial \left(\mu(x, \boldsymbol{\theta}) f(x|x_0, \Delta)\right)}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \left(\sigma^2(x, \boldsymbol{\theta}) f(x|x_0, \Delta)\right)}{\partial x^2} = 0$$

- Geri er ráð fyrir að $\sigma = 1$ og $l(x|x_0, \Delta) = log(f(x|x_0, \Delta))$ og set $e^{l(x|x_0, \Delta)}$ inn fyrir $f(x|x_0, \Delta)$ í jöfnu Kolmogorovs:

$$\frac{\partial l(x|x_0, \Delta)}{\partial \Delta} + \mu'(x) + \mu(x)\frac{\partial l(x|x_0, \Delta)}{\partial x} \tag{1}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial l(x|x_0, \Delta)}{\partial x}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 l(x|x_0, \Delta)}{\partial x^2} = 0$$

Skrifa Taylor útvíkkun af $l(x|x_0, \Delta)$ í Δ um $\Delta = 0$:

$$-\frac{1}{2} log(2\pi\Delta) - \frac{(x - x_0)^2}{2\Delta} + c_0(x|x_0) + c_1(x|x_0)\Delta$$
$$+c_2(x|x_0)\frac{\Delta^2}{2} + c_3(x|x_0)\frac{\Delta^3}{3!} + \cdots$$

og set inn í jöfnu (1). Safna saman liðum við $1/\Delta$, Δ^0, Δ^1 o.s.frv.

$$- \frac{(x - x_0)(\mu(x) - c_0'(x|x_0))}{\Delta} \tag{2}$$
$$- \frac{1}{2}c_0(x|x_0)'(x)^2 + \mu(x) + \mu(x)c_0'(x|x_0) \tag{3}$$
$$-\frac{c_0''(x|x_0)}{2} + c_1(x|x_0) + (x - x_0)c_1'(x|x_0)$$

næstu liðir

$$+\frac{1}{2}\Delta(2(\mu(x)-c_0'(x|x_0))c_1'(x|x_0)-c_1''(x|x0)$$
$$+2c_2(x|x_0)+(x-x_0)c_2'(x|x0))$$

$$+\frac{1}{12}\Delta^2(-6c_1'(x|x_0)^2+6\left(\mu(x)-c_0'(x|x_0)\right)c_2'(x|x_0)$$
$$-3c_2''(x|x_0)+6c_3(x|x_0)+2(x-x_0)c_3'(x|x_0))$$
$$\vdots$$

Hér fæst kerfi af diffurjöfnum

$$c_0(x|x_0) = \int_{x_0}^{x} \mu(u)du$$

$$\frac{1}{2}(\mu(x)^2 + \mu'(x)^2) + c_1(x|x_0) + (x - x0)c_1'(x|x_0) = 0$$
$$- c_1''(x|x0) + 2c_2(x|x_0) + (x - x_0)c_2'(x|x0) = 0$$
$$- \frac{3}{2}c_2''(x|x_0) - 3c_1'(x|x_0)^2 + 3c_3(x|x_0) + (x - x_0)c_3'(x|x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$- 2c_3''(x|x_0) - 12c_1'(x)c_2'(x) +$$
$$4c_4(x|x_0) + (x - x_0)c_4'(x|x_0) = 0$$
$$- \frac{5}{2}c_4''(x|x_0) - 20c_1'(x|x_0)c_3'(x|x_0) - 15c_2'(x|x_0)^2 +$$
$$5c_5(x|x_0) + (x - x_0)c_5'(x|x_0) = 0$$

$$\vdots$$

Finn c_j föllin með því að leysa:

$$jc_j(x|x_0) + (x - x_0)c_j'(x|x0) = g_j(x) \quad \text{sem gefur}$$
$$c_j(x) = \frac{1}{(x - x_0)^j} \int_{x_0}^{x} (u - x_0)^{j-1} g_j(u) du$$

Föllin g_j eru ákvörðuð af $c_0, \ldots, c_{j-1}$.

Nálga logaritma þéttifallsins, $l(x|x_0, \Delta)$ með því að taka K liði í Taylor-útvíkkun, $p_K(x|x_0, \Delta)$

Met $\boldsymbol{\theta}$ og fæ $\boldsymbol{\theta}_{ML}$ með því að hámarka

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{n} p_K(x_i|x_{i-1}, \Delta_i)$$

Einnig hægt að fá bayesískt mat og fleiri „likelihood"-hagnýtingar.

Hvað er surveillance (SPC)?

-

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis
- Ýmis rúmfræðileg tól EWMA vel þekkt

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis
- Ýmis rúmfræðileg tól EWMA vel þekkt
- Likelihood aðferðir hafa ýmsa optimality eiginleika

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis
- Ýmis rúmfræðileg tól EWMA vel þekkt
- Likelihood aðferðir hafa ýmsa optimality eiginleika
- Likelihood fyrir samfelldan tíma erfið

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis
- Ýmis rúmfræðileg tól EWMA vel þekkt
- Likelihood aðferðir hafa ýmsa optimality eiginleika
- Likelihood fyrir samfelldan tíma erfið
- Hugmynd hér að útfæra nálganir á likelihood-fallinu sem áhættustjórnunartæki í CKLS (og hugsanlega fleiri líkön).

Hvað er surveillance (SPC)?

- Líkt og structural-break/regime-shift/change-point-analysis, optimal stopping.
- Þetta minnir svolítið á kenningaprófanir, þ.e. tvö líkön borin saman. Í hvoru er ég núna?
- Ferli er fylgt eftir og síðan gefin út tilkynning þegar eitthvað er talið hafa farið úrskeiðis
- Ýmis rúmfræðileg tól EWMA vel þekkt
- Likelihood aðferðir hafa ýmsa optimality eiginleika
- Likelihood fyrir samfelldan tíma erfið
- Hugmynd hér að útfæra nálganir á likelihood-fallinu sem áhættustjórnunartæki í CKLS (og hugsanlega fleiri líkön).

$$\mathrm{d}X(t) = \kappa(\alpha - X(t))\,\mathrm{d}t + \sigma X(t)^{\rho}\,\mathrm{d}W(t).$$

Surveillance hugtök byggð á likelihood-process

-

Surveillance hugtök byggð á likelihood-process

- Likelihood-ratio process, samanburður á tveim líkindadreifingum (líkönum, líkindamálum), er erfiður í samfelldum tíma.

Surveillance hugtök byggð á likelihood-process

- Likelihood-ratio process, samanburður á tveim líkindadreifingum (líkönum, líkindamálum), er erfiður í samfelldum tíma.
- Fyrir Brownian-motion þar sem drift fer úr 0 í r við tíma 0 er:

$$X(t) = rI_{[0,\infty[}(t) + \sigma W(t)$$

$$\log(L(t)) = \frac{r}{\sigma^2}X(t) - \frac{r^2}{2\sigma^2}t$$

Surveillance hugtök byggð á likelihood-process

- Likelihood-ratio process, samanburður á tveim líkindadreifingum (líkönum, líkindamálum), er erfiður í samfelldum tíma.
- Fyrir Brownian-motion þar sem drift fer úr 0 í r við tíma 0 er:

$$X(t) = rI_{[0,\infty[}(t) + \sigma W(t)$$

$$\log(L(t)) = \frac{r}{\sigma^2} X(t) - \frac{r^2}{2\sigma^2} t$$

- Eftirlitsprocessar CUSUM, $(\gamma(t))$ og SR (Shiryaev-Roberts), $(\psi(t))$:

$$\log(\gamma(t)) = \log(\max_{\tau \leq t} \frac{L(t)}{L(\tau)})$$

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{L(t)}{L(\tau)} \, \mathrm{d}\tau$$

- Í þessu tilfelli verða eftirlitsprocessarnir CUSUM:

$$\log(\gamma(t)) = \log(\max_{\tau \leq t} \frac{L(t)}{L(\tau)})$$

og SR process sem fylgir:

$$\mathrm{d}\psi(t) = \mathrm{d}t + \frac{r}{\sigma^2}\psi(t)\,\mathrm{d}X(t).$$

- Í þessu tilfelli verða eftirlitsprocessarnir CUSUM:

$$\log(\gamma(t)) = \log(\max_{\tau \le t} \frac{L(t)}{L(\tau)})$$

  og SR process sem fylgir:

$$\mathrm{d}\psi(t) = \mathrm{d}t + \frac{r}{\sigma^2}\psi(t)\,\mathrm{d}X(t).$$

- Yfirleitt eru CUSUM og SR háð öllum $X(t)$ ferlinum.

- Í praxís verður að nálga CUSUM og SR með númerískum hætti

$$\log(\gamma(t_k)) =$$
$$\log(f_1(x(t_1),\ldots,x(t_k))) - \min_{0\le\tau\le t_k}(\log(f_0(x(t_1),\ldots,x(\tau))))$$

$$\psi(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f_1(x(t_1),\ldots,x(t_k))}{f_0(x(t_1),\ldots,x(t_j))}(t_k - t_{k-1})$$

- Í praxís verður að nálga CUSUM og SR með númerískum hætti

$$\log(\gamma(t_k)) =$$
$$\log(f_1(x(t_1), \ldots, x(t_k))) - \min_{0 \le \tau \le t_k} (\log(f_0(x(t_1), \ldots, x(\tau))))$$

$$\psi(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f_1(x(t_1), \ldots, x(t_k))}{f_0(x(t_1), \ldots, x(t_j))}(t_k - t_{k-1})$$

- Réttara er að kalla þetta mat frekar en nálgun. $\hat{\gamma}(t)$ og $\hat{\psi}(t)$

- Í praxís verður að nálga CUSUM og SR með númerískum hætti

$$\log(\gamma(t_k)) =$$
$$\log(f_1(x(t_1),\ldots,x(t_k))) - \min_{0\le\tau\le t_k}(\log(f_0(x(t_1),\ldots,x(\tau))))$$
$$\psi(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f_1(x(t_1),\ldots,x(t_k))}{f_0(x(t_1),\ldots,x(t_j))}(t_k - t_{k-1})$$

- Réttara er að kalla þetta mat frekar en nálgun. $\hat{\gamma}(t)$ og $\hat{\psi}(t)$
- Síðan er kveikt á aðvörunarljósi á tíma τ_A ef :

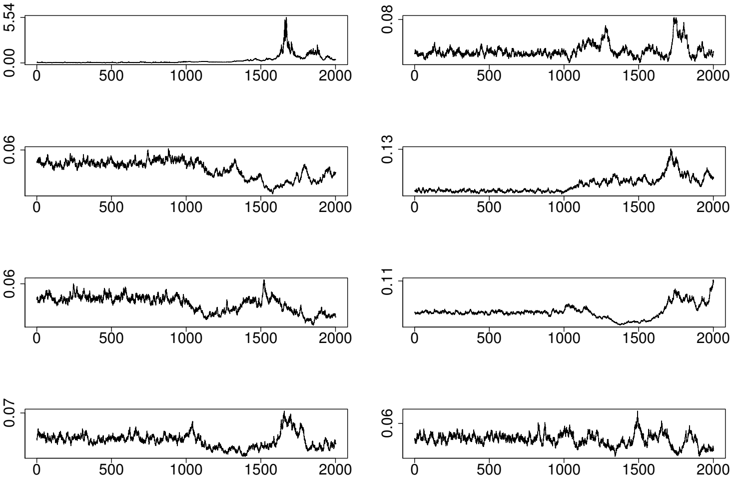
$$\tau_A = \inf\{t > 0; \gamma(t) > d\} \quad \text{eða}$$
$$\tau_A = \inf\{t > 0; \psi(t) > d^*\}.$$

- d og d^* eru ákveðin eftir svipuðum prinsípum og krítísk gildi í tölfræðiprófum. Þ.e. ákveðið er hvað eigi að líða langt á milli rangra aðvarana og meðal biðtími í hættu ástandi lágmarkaður.

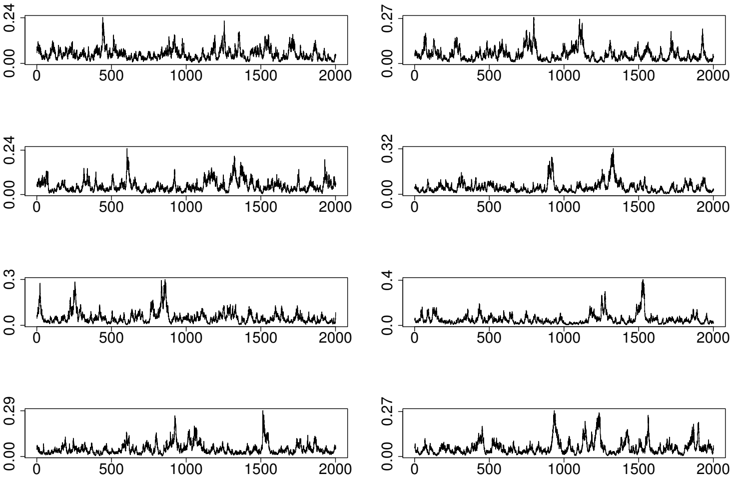
- d og d^* eru ákveðin eftir svipuðum prinsípum og krítísk gildi í tölfræðiprófum. Þ.e. ákveðið er hvað eigi að líða langt á milli rangra aðvarana og meðal biðtími í hættu ástandi lágmarkaður.
- Upplagt að fylgjast með vaxtaþróun (skuldabréfaálagi??). Valdi viðmiðunarlíkan með góða hegðun, M_0 og síðan M_1 líkan með alvöru „heavy-tail" og síðan M_2 breytingu á aðlögunarhraða

$$
\begin{aligned}
&M_0 : \boldsymbol{\theta} = (\kappa = 0.1, \alpha = 0.05, \sigma = 0.1, \rho = 0.75) \\
&\text{borið við breytingu á } \rho \\
&M_1 : \boldsymbol{\theta} = (\kappa = 0.1, \alpha = 0.05, \sigma = 0.1, \rho = 1.5) \\
&\text{borið við breytingu á } \kappa \\
&M_2 : \boldsymbol{\theta} = (\kappa = 0.05, \alpha = 0.05, \sigma = 0.1, \rho = 0.75)
\end{aligned}
$$

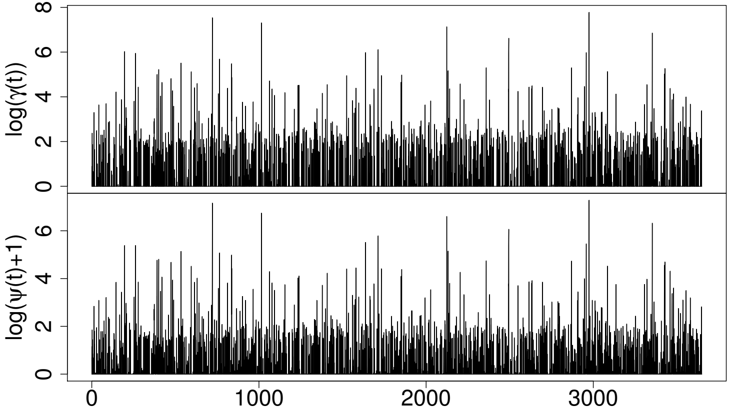
Dæmi um breytingu úr M_0 *í* M_1



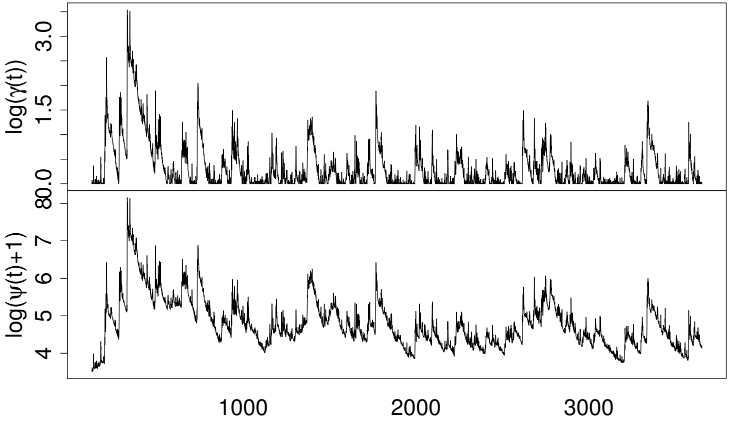
Dæmi um breytingu úr M_0 *í* M_2



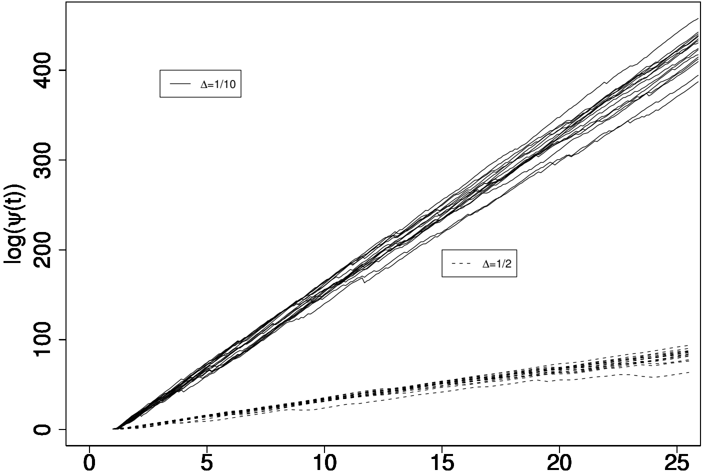
CUSUM og SR þegar eftirlit er með M_1 möguleikanum og ekkert gerist.



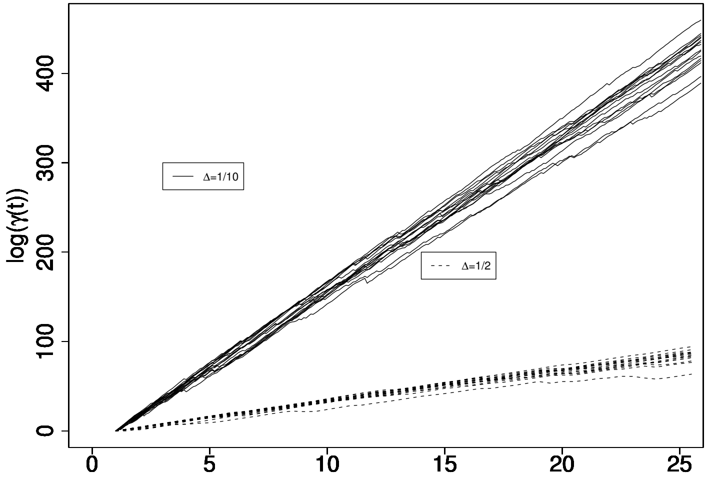
CUSUM og SR þegar eftirlit er með M_2 möguleikanum og ekkert gerist.



SR fyrir breytingu í líkan M_1 við tíma 0.

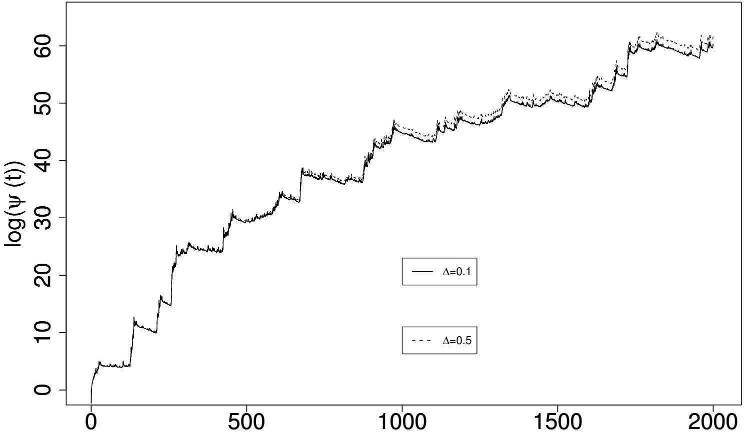


CUSUM fyrir breytingu í líkan M_1 við tíma 0.



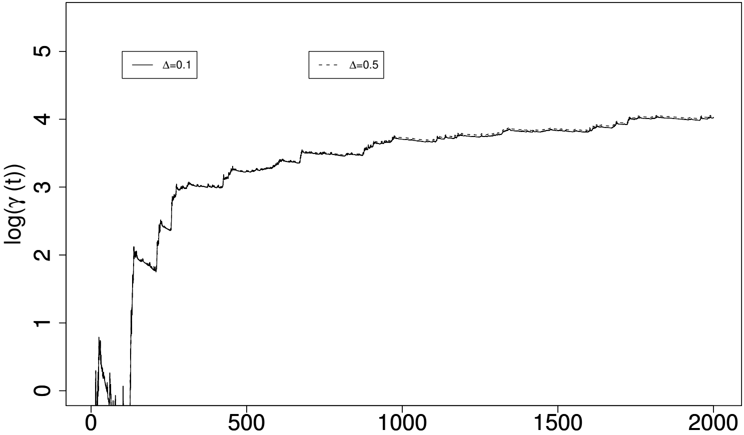
Mynd 1: Effects of sampling density on $\log(\gamma(t))$. 16 replications of true model M_1 against M_0 for $\Delta = 1/2$ and $\Delta = 1/10$.

SR fyrir breytingu í líkan M_2 við tíma 0



Mynd 2: Effects of sampling frequency on log(SR)=log($\psi(t)$) for a shift from model M_0 to M_2 at $t = 0$.

CUSUM fyrir breytingu í líkan M_2 við tíma 0



Lokaorð

-

Lokaorð

- Hægt að framkvæma svona likelihood nálgun á flóknari líkönum, með meiri dýnamískan strúktúr, mörgum víddum, o.s.frv.

Lokaorð

- Hægt að framkvæma svona likelihood nálgun á flóknari líkönum, með meiri dýnamískan strúktúr, mörgum víddum, o.s.frv.
- Hagnýtingar í estimation, ML/Bayes, decision-teoríu/surveillance o.s.frv.

Lokaorð

- Hægt að framkvæma svona likelihood nálgun á flóknari líkönum, með meiri dýnamískan strúktúr, mörgum víddum, o.s.frv.
- Hagnýtingar í estimation, ML/Bayes, decision-teoríu/surveillance o.s.frv.
- Það er vandsamt að láta sér detta í hug vitrænt ólínulegt líkan í mörgum víddum

Lokaorð

- Hægt að framkvæma svona likelihood nálgun á flóknari líkönum, með meiri dýnamískan strúktúr, mörgum víddum, o.s.frv.
- Hagnýtingar í estimation, ML/Bayes, decision-teoríu/surveillance o.s.frv.
- Það er vandsamt að láta sér detta í hug vitrænt ólínulegt líkan í mörgum víddum
- Í surveillance þarf að huga að reiknihraða. Að reikna SR út með minni aðferð er mjög seinlegt.

Lokaorð

- Hægt að framkvæma svona likelihood nálgun á flóknari líkönum, með meiri dýnamískan strúktúr, mörgum víddum, o.s.frv.
- Hagnýtingar í estimation, ML/Bayes, decision-teoríu/surveillance o.s.frv.
- Það er vandsamt að láta sér detta í hug vitrænt ólínulegt líkan í mörgum víddum
- Í surveillance þarf að huga að reiknihraða. Að reikna SR út með minni aðferð er mjög seinlegt.
- R-forrit, bcp, changepoint, spc, strucchange + eigin forrit.

Barry, D. & Hartigan, J. A. (1993). A bayesian analysis for change point problems. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), pp. 309–319.

Broemeling, L. D. & Tsurumi, H. (1987). *Econometrics and Structural Change*. Marcel Dekk, New York.

Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F., & Sanders, A. (1992). An empirical comparison of alternative models for the short-term interest rate. *Journal of Finance*, *47*, 1209–1228.

Holbert, D. (1982). A bayesian analysis of a switching linear model. *Journal of Econometrics*, *19*, 77–87.

Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, *41*(1/2), pp. 100–115.

Page, E. S. (1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point. *Biometrika*, *42*(3/4), pp. 523–527.

Page, E. S. (1957). On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point. *Biometrika*, *44*(1/2), pp. 248–252.

Zellner, A. (1971). *An introduction to Bayesian inference in econometrics*. John Wiley & Sons.